## LICEU

### Clasa a IX-a

**S:L14.284.** Fie $ABC$ un triunghi dreptunghic în $A$ cu măsura unghiului $C$ de $30°$. Dacă $[AD]$ este înălţimea din $A$, $I$ este centrul cercului înscris iar $T$ este mijlocul segmentului $[BI]$, arătaţi că $(AT$ este bisectoarea unghiului $BAD$.

*Neculai Stanciu*, Buzău şi *Titu Zvonaru*, Comăneşti

**S:L14.290. Povestea şahului.** Regele Persiei a vrut să îl recompenseze pe cel care a inventat şahul. Acesta din urmă i-a cerut regelui să pună pe primul pătrat al tablei un bob de grâu, pe al doilea pătrat două boabe de grâu, pe al treilea pătrat patru boabe de grâu, apoi opt boabe şi aşa mai departe, până ajunge la cel de-al şaizeci şi patrulea pătrat.

a) Dacă notăm cu $G_n$ numărul boabelor de grâu de pe pătratul $n$, arătaţi că numerele $G_1, G_2, \ldots, G_{64}$ sunt în progresie geometrică.

b) Câte boabe vor corespunde întregii table de şah?

c) Dacă 1024 de boabe de grâu cântăresc 100 de grame, care este masa tuturor boabelor de grâu de pe întreaga tablă de şah?

d) Dacă producţia unei ţări este de 35 de milioane de tone de grâu pe an, în câţi ani s-ar umple cu grâu tabla de şah?

(Pentru delectare recomandăm cartea: Mihail Sadoveanu - *Aventurile şahului.*)

* * *

### Clasa a X-a

**S:L14.296.** Determinaţi valorile reale $x$ şi $y$ pentru care avem, simultan, $2^x - \log_3 y = 7$ şi $2^y + \log_3 x = 9$.

**S:L14.300.** Pentru un număr natural nenul $n$ notăm $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n$ şi $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)$. Dacă $n$ este număr impar, arătaţi că numărul $(2n-1)!! + (2n)!!$ se divide cu $2n+1$.

### Clasa a XI-a

**S:L14.306.** Fie $(x_n(a))_n$ un şir ce depinde de parametrul $a \in [0,1]$. Presupunând că, pentru fiecare $a$, şirul este monoton convergent iar limita sa este egală cu 0, arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{a\in[0,1]} |x_n(a)| = 0$. Arătaţi că dacă şirul nu este monoton, rezultatul nu mai este, în general, adevărat.

**S:L14.309.** Arătaţi că şirul $(a_n)_n$ este crescător, şirul $(b_n)_n$ este descrescător şi $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ (adică şirurile sunt *adiacente*).

## Clasa a XII-a

**S:L14.316.** Arătaţi că funcţia

$$f:[0;2\pi]\to\mathbb{R},\qquad f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{\sin x}, & x\in[0;2\pi]\setminus\{0,\pi,2\pi\}\\ 0, & x\in\{0,\pi,2\pi\}\end{cases},$$

este integrabilă *Riemann*.

**S:L14.320. Legea lui Poiseuille.** Viteza $v$ a sângelui care curge printr-un vas sangvin de rază $R$ şi lungime $l$ la distanţa $r$ faţă de axa centrală (a vasului sangvin privit ca un cilindru) este dată de expresia

$$v(r)=\frac{P}{4\eta l}\left(R^2-r^2\right),$$

unde $P$ este diferenţa dintre presiunile de la capetele vasului iar $\eta$ este vâscozitatea sângelui. Aflaţi viteza medie $v_m=\dfrac{1}{R}\displaystyle\int_0^R v(r)\mathrm{d}r$ a sângelui de-a lungul intervalului $[0;R]$. Calculaţi raportul dintre viteza maximă a sângelui, $v_{max}$, şi $v_m$.