

## Liceu

### Clasa a IX-a

**S:L14.1.** Demonstrați că pentru două numere reale  $a, b$  avem  $a \leq b$  dacă și numai dacă oricare ar fi  $c$  real cu  $c > b$  avem  $c > a$ .

**S:L14.8.** Determinați cel mai mic număr natural  $m \geq 3$  pentru care există un număr natural  $n$  astfel încât

$$\lfloor n\sqrt{m} \rfloor = 2014.$$

### Clasa a X-a

**S:L14.17.** Pentru un triunghi cu vârfurile în puncte de coordonate întregi ale planului cartezian, poate exista o înălțime de lungime rațională? Dar număr natural?

**S:L14.18.** Câte perechi de soluții  $(X, Y)$  are ecuația  $X \cup Y = A$  dacă  $A$  este o mulțime cu  $n > 1$  elemente iar  $X, Y \subseteq A$ ? Se aleg la întâmplare două submulțimi nevide diferite ale unei mulțimi cu  $n$  elemente. Arătați că probabilitatea ca reuniunea lor să fie întreaga mulțime este  $\frac{3^n - 3}{(2^n - 1)(2^n - 2)}$ .

Alegem la întâmplare două mulțimi  $X, Y \subseteq A$ . Arătați că probabilitatea ca  $X \cup Y = A$  este  $\frac{3^n - 1}{(2^n - 1)(2^n - 2)}$ .

### Clasa a XI-a

**S:L14.22.** Câte soluții reale are ecuația  $\operatorname{tg} x = x$  în intervalul  $[0, 2014]$ ?

**S:L14.28.** Aflați minimumul expresiei  $x^2 - 2x + y$  dacă  $x, y \geq 0$  și  $x + y \leq 2$  interpretând problema grafic în planul  $xOy$ .

### Clasa a XII-a

**S:L14.31.** Poate fi scrisă funcția Dirichlet (ce ia valoarea 1 pe numere raționale și 0 pe numere iraționale) ca diferență de funcții monotone? (Folosiți faptul că o funcție monotonă este integrabilă.)

**S:L14.37.** În orice grup  $G$ , pentru  $a, b \in G$ , ordinul elementului  $ab$  este egal cu ordinul elementului  $ba$  ?