Liceu

Clasa a IX-a

S:L13.282. Fie $ABCDEF$ un hexagon convex iar M, N, P, Q respectiv punctele de intersecţie ale segmentelor ce unesc mijloacele laturilor opuse în patrulaterele $ABCD, ABDE, ABEF, ABFC$. Să se arate patrulatrerul $MNPQ$ este paralelogram.

Traian Tămâian, Carei

S:L13.285. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale a cu proprietatea că dacă n este un număr natural astfel încât $(a+1)^n+(a-1)^n+1$ este un număr prim, atunci 12 este un divizor al lui n.

Corneliu Mănescu-Avram, Ploieşti

Clasa a X-a

S:L13.294. Considerăm $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f_a : [0,1] \to \to \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$ dată de $f(x) = \frac{(x+1)(x+a)}{x^2-x+1}$ este corect definită. Demonstraţi că există un unic $a \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că f este inversabilă. Determinaţi această funcţie inversă.

Cătălin Năchilă şi *Petre Năchilă*, Ploieşti

S:L13.297. Într-un triunghi dreptunghic de ipotenuză a şi catete b, c se ştie că $b \cdot m_b + c \cdot m_c = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}$, unde m_b, m_c sunt lungimile medianelor corespunzătoare laturilor b respectiv c. Determinaţi în funcţie de a aria triunghiului.

Cătălin Năchilă şi *Petre Năchilă*, Ploieşti

Clasa a XI-a

S:L13.309. Studiaţi convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 = a \in \in [-1,1]$ şi $2a_n = a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} - 1$, pentru orice $n \geq 1$.

Petre Năchilă şi *Cătălin Năchilă*, Ploieşti

S:L13.310. Există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru fiecare punct $x \in \mathbb{R}$ există un şir $(x_n)_n$ cu limita x şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$?

Clasa a XII-a

S:L13.316. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că dacă funcţia $f : G \to G$, $f(x) = x^{n+1}$ este morfism surjectiv de grupuri atunci şi funcţia $g : G \to G$, definită prin $g(x) = x^n$ este morfism de grupuri.

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

S:L13.318. O populaţie de bacterii se dezvoltă în timp după formula $f'(t) = 100f(t)(1000 - f(t))$, unde prin $f(t)$ notăm numărul de bacterii la timpul t. Ştiind că la momentul iniţia $t = 0$ erau 200 de bacterii, câte bacterii sunt în populaţie la timpul $t = 10000$? (O ecuaţie de acest tip se numeşte logistică şi este un model adesea folosit pentru studiul evoluţiei unei populaţii).