Liceu

Clasa a IX-a

S:L13.244. Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 2}$, definit prin

$$x_n = \sqrt[n]{n} + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!}} + 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$$

este mărginit.

Viorica Stegaru şi *Georgel Şlincu*, Dorohoi

S:L13.246. Fie $ABCD$ un patrulater care nu este paralelogram şi punctele M, N, P, Q pe semidreptele $(DA, (AB, (BC$, respectiv $(CD$, astfel încât să avem $\dfrac{DM}{DA} = \dfrac{AN}{AB} = \dfrac{BP}{BC} = \dfrac{CQ}{CD} = \alpha$, cu $\alpha \in (0; \infty)$. Arătaţi că:

a) $MNPQ$ este paralelogram dacă şi numai dacă $\alpha = \dfrac{1}{2}$;

b) mijloacele segmentelor $(MN), (AB), (DC), (PQ)$ sunt vârfurile unui paralelogram pentru orice valoare a lui α.

Teodor Trişcă şi *Daniela Vicol*, Botoşani

Clasa a X-a

S:L13.251. Să se determine şi să se construiască un triunghi de arie maximă, având vârfurile pe trei cercuri concentrice de raze $1, 2$ şi $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Gheorghe Oniciuc, Botoşani

S:L13.255. Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = \cos(\cos x)$ şi $g(x) = \sin(\sin x)$. Arătaţi că $f(\pi - x) + g(\pi - x) = f(x) + g(x)$ şi că $f(x) > g(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Clasa a XI-a

S:L13.262. Determinaţi formula termenului general al şirului $(x_n)_n$ care satisface relaţia de recurenţă $x_n x_{n+1} + (b - a)x_n = ab, n \geq 0$, cu $x_0 > 0$ şi $a > 2b > 0$. Este şirul $(x_n)_n$ convergent?

Elisabeta Mihoc, Botoşani

S:L13.268. a) Fie A o matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, inversabilă, cu $A^2, A^3 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Arătaţi că $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, A are urma şi determinantul numere întregi şi daţi exemplu de o astfel de matrice A, care să nu aibă toate componentele numere întregi.

b) Găsiţi o matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, cu măcar o componentă nereală, astfel încât $B^2, B^3 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Adrian Boţan, Botoşani

Clasa a XII-a

S:L13.274. Considerăm mulţimea $A = \{0\} \cup [1; \infty)$ şi legea de compoziţie $x \circ y = xy + |\operatorname{sgn}(x-1) \cdot \operatorname{sgn}(y-1)|$. Arătaţi că mulţimea A este parte stabilă în raport cu legea „$\circ$" şi că legea „$\circ$" este neasociativă, are element neutru iar toate elementele au simetric unic cu excepţia unui element care are o infinitate de simetrice.

S:L13.280. Considerăm funcţia $f : (0; \infty) \to (0; \infty)$, derivabilă, cu $f(1) = \dfrac{1}{2}$ şi $f'(x) = \dfrac{2013 \cdot f(x)}{x^{2014} + x}, \forall x \in (0; \infty)$. Arătaţi că $f(x) = \dfrac{x^{2013}}{x^{2013} + 1}$.