

Liceu
Clasa a IX-a

S:L13.127. Fie $ABCD$ un dreptunghi, $\{O\} = AC \cap BD$, iar \mathcal{H} , \mathcal{O} , \mathcal{I} , \mathcal{G} mulțimile formate din ortocentrele, centrele cercurilor circumscrise, centrele cercurilor înscrise, respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor AOB , BOC , COD , DOA . Dacă una dintre aceste mulțimi are proprietatea că elementele sale sunt vârfurile unui pătrat, arătați că toate mulțimile au această proprietate.

Ovidiu Buică, Ciacova

S:L13.128. Arătați că ecuația $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{x}{n+1}\right]$ are, pentru fiecare număr natural nenul, un număr finit de soluții. Câte soluții are ecuația pentru $n = 9$?

* * *

Clasa a X-a

S:L13.134. Arătați că, dacă un paralelipiped dreptunghic are volumul egal cu 8, atunci paralelipipedul obținut mărirind fiecare dimensiune cu o unitate are volumul cel puțin 27.

Aurel Doboșan, Lugoj

S:L13.138. Studiați monotonia funcției

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (a^x + 2013^x)^{\frac{2013}{x}},$$

unde $a \in (0, \infty)$.

Anamaria Lițoiu, Timișoara

Clasa a XI-a

S:L13.144. Care sunt funcțiile continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x^3) - f(y^3) = (x^2 + f(xy) + y^2)f(x - y),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$?

Lucian Dragomir, Oțelu Roșu

S:L13.150. Fie A și A' două puncte aparținând unei parabole, t și t' tangentele în A și A' la parabolă, iar B punctul lor de intersecție.

Demonstrați că:

- a) Mediana $[BM]$ a triunghiului ABA' este paralelă cu axa parabolei.
- b) Mijlocul N al medianei $[BM]$ aparține parabolei.
- c) Tangenta în N la parabolă este paralelă cu dreapta AA' .
- d) Punctul N este mijlocul segmentului $[LL']$, unde L și L' sunt punctele de intersecție ale tangentei în N la parabolă cu tangentele t și t' .

Cornelia Vizman, Timișoara

Clasa a XII-a

S:L13.155. Dacă p este un număr prim, expresia

$$E = (x - y)^p + (y - z)^p + (z - x)^p$$

se divide cu $p(x - y)(y - z)(z - x)$.

Ovidiu Buică, Ciacova

S:L13.156. Fie G un grup ce posedă exact trei elemente de ordin doi. Demonstrați că G conține un subgrup izomorf cu grupul lui *Klein* sau cu grupul permutărilor de ordin trei.

Nelu Chichirim, Constanța