Liceu
Clasa a IX-a

S:L13.83. În interiorul triunghiului ABC se consideră un punct M astfel încât măsurile unghiurilor $\sphericalangle MAB$, $\sphericalangle MBC$, $\sphericalangle MCA$ sunt toate 30°. Demonstraţi că

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Romanţa Ghiţă şi *Ioan Ghiţă*, Blaj

S:L13.88. Găsiţi 13 numere consecutive neprime cu 2310. Arătaţi că date fiind 14 numere consecutive, cel puţin unul este neprim cu 2310.

Clasa a X-a

S:L13.94. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale n pentru care partea fracţionară a numărului $\log_2 n + \log_2(n+1)$ este mai mică decât $\frac{2}{5n}$.

S:L13.98. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale cu proprietatea

$$a_{n+1} - (n+1)a_n + na_{n-1} = 0$$

pentru orice $n \geq 1$ şi $a_1 = 72$, $a_0 = 71$. Arătaţi că există exact doi termeni ai şirului care sunt pătrate perfecte.

Gheorghe Cihodariu, Bucureşti

Clasa a XI-a

S:L13.106. Doi concurenţi A şi B trag alternativ la ţintă. Probabilităţile de a lovi ţinta ale fuiecăruia sunt p respectiv q, nenule. Concurentul A trage primul. Concurentul care loveşte primul ţinta câştigă. Arătaţi că cei doi concurenţi au probabilităţi egale de câştig dacă şi numai dacă $0 < p \leq \frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 1$.

George Stoica, Canada

S:L13.110. Fie A şi B matrici pătrate de ordin 2013, cu elemente complexe si pentru care există numere complexe diferite $t_1, t_2, \ldots, t_{2014}$ cu proprietatea $(At_i + B)^n = O_n$ pentru $i = 1, 2, \ldots, 2014$.

Arătaţi că $A^n = B^n = O_n$.

Cătălin Gherghe, Bucureşti

Clasa a XII-a

S:L13.112. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă astfel încât graficul ei conţine trei puncte coliniare. Arătaţi că derivata a doua se anulează în cel puţin un punct.

Folclor matematic

S:L13.115. Arătaţi că funcţia $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} \mathrm{d}t$$

este injectivă. Care este imaginea funcţiei?

Cătălin Gherghe, Bucureşti