Liceu

Clasa a IX-a

2. Un client al unui magazin doreşte să cumpere un produs despre care ştie că ar costa între 1 leu şi 1000 lei. Acesta îşi pregăteşte banii de acasă punând în 10 plicuri sume distincte de bani aşa încât la magazin orice produs ar cumpăra să plătească folosind anumite plicuri, fără a mai modifica conţinutul lor. Ce sume de bani pune în plicuri?

Dicu Petrică, Sibiu

5. Fie a, b măsura în grade sexagesimale a două unghiuri astfel încât $a+b=30°$. Care este valoarea expresiei $\dfrac{2\cos a - 2\sin b - 1}{2\sin a + 2\cos b - \sqrt{3}}$?

Dumitru Acu, Sibiu

Clasa a X-a

7. Doi culegători de mere au adunat, fiecare în coşul său, a_1 mere roşii şi b_1 mere verzi, respectiv a_2 mere roşii şi b_2 mere verzi. După aceasta ei au golit coşurile într-o ladă (care iniţial era goală) nu înainte însă de a lua fiecare din coşul său, la întâmplare, câte un măr pe care să-l mănânce.

Care este probabilitatea ca, luând din ladă la întâmplare un măr, acesta să fie roşu?

Dumitru Barac şi *Nicolae Secelean*, Sibiu

10. Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relaţia de recurenţă $x_{n+1} = \dfrac{4x_n^2+1}{8x_n}$, pentru orice număr natural n.

Arătaţi că şirul $(y_n)_{n\geq 0}$ definit prin $y_n = \left(\dfrac{2x_n+1}{2x_n-1}\right)^{2^{-n}}$, este constant.

Florin Rotaru, Focşani

Clasa a XI-a

4. Arătaţi că $\det(A \cdot {}^tA) = 0$ oricare ar fi $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*, m > n$, iar ${}^tA$ este transpusa matricei A.

Livia Băcilă, Sibiu

8. Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$ şi $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive, astfel încât şirul de termen general $(n^{k-1}a_n + n^{k-2}a_n^2 + ... + na_n^{k-1} + a_n^k)$ este convergent. Studiaţi convergenţa şirului de termen general:

$$(n^{k-2}a_n + n^{k-3}a_n^2 + ... + na_n^{k-3} + a_n^{k-2}).$$

Dumitru Acu, Sibiu

Clasa a XII-a

6. Un vas de tablă are forma unui trunchi de con fără capac, cu raza mare de patru ori mai mare decât raza mică. Aflaţi înălţimea vasului astfel ca volumul fiind dat, tabla folosită să aibă aria minimă.

Ileana Oţoiu, Sibiu

9. Fie $(M, \cdot)$ un monoid finit cu n elemente şi element neutru e.

a) Arătaţi că pentru orice $a \in M$ există $k, p \in \mathbb{N}^*$, $k > 2p$ şi $a^p = a^k$.

b) Arătaţi că dacă ecuaţia $x^n = x$ are în M soluţia unică $x = e$, atunci $(M, \cdot)$ este grup.