

## Liceu

### Clasa a IX-a

**2.** Un client al unui magazin dorește să cumpere un produs despre care știe că ar costa între 1 leu și 1000 lei. Acesta își pregătește banii de acasă punând în 10 plicuri sume distincte de bani așa încât la magazin orice produs ar cumpăra să plătească folosind anumite plicuri, fără a mai modifica conținutul lor. Ce sume de bani pune în plicuri?

*Dicu Petrică, Sibiu*

5. Fie  $a, b$  măsura în grade sexagesimale a două unghiuri astfel încât  $a + b = 30^\circ$ . Care este valoarea expresiei  $\frac{2 \cos a - 2 \sin b - 1}{2 \sin a + 2 \cos b - \sqrt{3}}$ ?

*Dumitru Acu, Sibiu*

### Clasa a X-a

7. Doi culegători de mere au adunat, fiecare în coșul său,  $a_1$  mere roșii și  $b_1$  mere verzi, respectiv  $a_2$  mere roșii și  $b_2$  mere verzi. După aceasta ei au golit coșurile într-o ladă (care inițial era goală) nu înainte însă de a lua fiecare din coșul său, la întâmplare, câte un măr pe care să-l mănânce.

Care este probabilitatea ca, luând din ladă la întâmplare un măr, acesta să fie roșu?

*Dumitru Barac și Nicolae Secolean, Sibiu*

10. Considerăm șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  definit prin relația de recurență  $x_{n+1} = \frac{4x_n^2 + 1}{8x_n}$ , pentru orice număr natural  $n$ .

Arătați că șirul  $(y_n)_{n \geq 0}$  definit prin  $y_n = \left(\frac{2x_n + 1}{2x_n - 1}\right)^{2^{-n}}$ , este constant.

*Florin Rotaru, Focșani*

### Clasa a XI-a

4. Arătați că  $\det(A \cdot {}^t A) = 0$  oricare ar fi  $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ , unde  $m, n \in \mathbb{N}^*$ ,  $m > n$ , iar  ${}^t A$  este transpusa matricei  $A$ .

*Livia Băcilă, Sibiu*

8. Fie  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 3$  și  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir de numere reale pozitive, astfel încât șirul de termen general  $(n^{k-1}a_n + n^{k-2}a_n^2 + \dots + na_n^{k-1} + a_n^k)$  este convergent. Studiați convergența șirului de termen general:

$$(n^{k-2}a_n + n^{k-3}a_n^2 + \dots + na_n^{k-3} + a_n^{k-2}).$$

*Dumitru Acu, Sibiu*

### Clasa a XII-a

6. Un vas de tablă are forma unui trunchi de con fără capac, cu raza mare de patru ori mai mare decât raza mică. Aflați înălțimea vasului astfel ca volumul fiind dat, tabla folosită să aibă aria minimă.

*Ileana Oțoiu, Sibiu*

9. Fie  $(M, \cdot)$  un monoid finit cu  $n$  elemente și element neutru  $e$ .

a) Arătați că pentru orice  $a \in M$  există  $k, p \in \mathbb{N}^*$ ,  $k > 2p$  și  $a^p = a^k$ .

b) Arătați că dacă ecuația  $x^n = x$  are în  $M$  soluția unică  $x = e$ , atunci  $(M, \cdot)$  este grup.