LICEU

Clasa a IX-a

2. Determinaţi cel mai mare număr real α cu proprietatea că oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ avem $1 - x^2 \leq \alpha$ sau $x^2 - 2x \geq -\alpha$.

9. Punctele M, N, P aflate pe laturile AB, BC şi respectiv CA ale triunghiului ABC le împarte pe fiecare dintre acestea în raportul $\frac{1}{3}$. Segmentele AM, BN şi CP sunt laturile unui triunghi. Aflaţi raportul dintre aria acestui triunghi şi aria triunghiului ABC.

Clasa a X-a

1. Determinaţi numărul perechilor de mulţimi (A, B), care îndeplinesc condiţiile:

a) $A \cup B \subset \{1, 2, 3, \ldots, 2012\}$;

b) $A \setminus B \subset \{1, 2, 3, \ldots, 1001\}$;

c) $A \cap B \neq \emptyset$.

Manuela Prajea, Tr. Severin

7. La Disney Park unele dintre atracţii sunt legate între ele prin drumuri directe. Se ştie că de la fiecare atracţie pleacă cel puţin trei drumuri. Arătaţi că există un circuit (acelaşi loc de întoarcere cu cel de plecare) care trece printr-un număr par de atracţii.

Clasa a XI-a

4. Arătaţi că există o infinitate de perechi (x, y) de numere naturale nenule cu proprietatea că $x \geq y$, $x + y = 2z + 7$, $xy = \dfrac{z(z+7)}{2}$, unde z este număr natural.

8. Considerăm şirurile de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ date prin relaţiile $a_1 = 2, b_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 5b_n$, $b_{n+1} = a_n + b_n$, $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$. Arătaţi că $|c_{n+1} - \sqrt{5}| \leq \dfrac{2}{\sqrt{5}+1}|c_n - \sqrt{5}|$ pentru orice $n \geq 1$. Deduceţi că $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \sqrt{5}$ şi determinaţi cel mai mic n pentru care c_n aproximează $\sqrt{5}$ cu 3 zecimale exacte.

Ovidiu Şontea şi *Gabriel Vrânceanu*, Bucureşti

Clasa a XII-a

7. Folosind o sumă Riemann convenabilă, arătaţi că $\displaystyle\sum_{k=1}^{2012} \frac{1}{k^3} < 1,21$.

10. Calculaţi:

$$\int \frac{1}{x\left(x^{2012} + 2013\right)} \mathrm{d}x.$$

* * *