

LICEU

Clasa a IX-a

9. Considerăm cinci numere strict pozitive distincte. Calculând media armonică a tuturor perechilor distincte dintre acestea obținem șapte valori. Să se arate că, luate într-o anumită ordine, cele cinci numere formează o progresie armonică.

Neculai Stanciu și Titu Zvonaru, Bacău

10. Se consideră pătratul ce coordonate $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,4)$, $C(0,4)$. Câte triunghiuri scuțitunghice cu vârfuri de coordonate întregi în interiorul sau pe laturile pătratului există?

Clasa a X-a

6. În triunghiul ABC cu centrul cercului circumscris O și triunghi ortic DEF , ($D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$) notăm intersecțiile $CO \cap AB$ și $DE \cap CF$ cu N respectiv M . Demonstrați că $NA \cdot ME = NB \cdot MD$.

Cătălin Năchilă și Petre Năchilă, Ploiești

8. Arătați că oricum am alege 23 de numere reale din intervalul $[1, 2012]$ există trei dintre acestea care pot fi laturile unui triunghi.

Mihai Bunget, Târgu Jiu

Clasa a XI-a

7. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ singulare cu proprietățile $AB = BA$, $\det(A - B) = 1$, $\det(A + B) = 3$. Calculați $\det(A^2 - AB + B^2)$.

9. Fie $a > 0$. Șirul de numere pozitive $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este definit prin $x_n = \frac{a - x_{n+1}}{2x_{n+1}}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x_0 = 0$. Studiați convergența acestui șir.

Clasa a XII-a

1. Demonstrați că pentru orice $n \geq 1$, $\cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n < 0,55$.

10. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale prime ecuația:

$$x^y + y^x + 13 = xyz.$$

Marian Cucoaneș, Mărășești