LICEU

Clasa a IX-a

6. O barcă cu motor merge pe râu în sus şi în jos, parcurgând 60 km în 4 ore. Viteza bărcii în aval este de 20 km/oră, iar în amonte de 10 km/oră. Determinaţi:

a) viteza bărcii în apa stătătoare, şi viteza curentului apei;

b) distanţele parcurse de barcă pe râu în sus şi în jos.

Nicolae Pellegrini, Arad

9. Se dă un pătrat perfect cu cifra unităţilor 9 şi cifra zecilor 0. Arătaţi că cifra sutelor este pară. Determinaţi cele mai mici două pătrate perfecte, care se termină cu cifrele $\overline{209}$.

* * *

Clasa a X-a

5. O suprafaţă de teren în formă de pătrat se parcelează în 64 de parcele identice (sub forma unei table de şah). Un antreprenor deţine 7 parcele de teren. Acesta mai are voie să cumpere o altă parcelă de teren, doar dacă aceasta are cel puţin două laturi comune cu parcelele pe care acesta le deţine până în prezent. Există o configuraţie a celor 7 parcele pe care antreprenorul le deţine, care să îi permită acestuia să cumpere întreaga suprafaţă de teren (toate cele 64 parcele)?

Diana Bodrogean şi *Ovidiu Bodrogean*, Arad

9. Rezolvaţi în numere raţionale ecuaţia $3^x = x + 2$.

* * *

Clasa a XI-a

1. Fie M mulţimea matricelor pătrate de ordin trei cu elemente din mulţimea $\{3, 6, 9\}$. Arătaţi că în M există matrice inversabile şi matrice neinversabile. Există în M matrice inversabile cu proprietatea că inversa lor este tot în M?

* * *

6. Demonstraţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ prin $f(x) = \mathrm{e}^x$ are o singură tangentă la grafic ce trece prin origine. Există parabole tangente la grafic şi care trec prin origine?

* * *

Clasa a XII-a

3. Un ecran luminos, dreptunghiular, are forma unei matrice $m \times n$, $2 \leq m < n$. În fiecare căsuţă din cele mn se poate aprinde una din $p \in \mathbb{N}$ culori. Spunem că ecranul este $k-$ *prietenos* dacă $2 \leq k \leq n$.

a) Determinaţi probabilitatea ca la o alegere aleatoare a culorilor, ecranul să fie k–prietenos.

b) Dacă $m = 3, p = 4$, determinaţi cea mai mică valoare a lui n pentru care probabilitatea ecranelor 2-prietenoase este cea mai mare dintre toate cele $k-$ prietenoase?

Cecilia Deaconescu, Piteşti

6. Determinaţi numerele naturale n pentru care:

$$1!3!5!\dots(2m-1)! = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)!.$$

* * *