

LICEU

Clasa a IX-a

1. Avem 12 pereți prefabricați (patru de 3 m, patru de 4 m și patru de 5 m). Să se deducă o strategie de asamblare a pereților pentru a se forma 3 camere astfel încât suma suprafețelor acestora să fie maximă .

10. Mulțimile A, B, C satisfac relațiile:

$$A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B, [B \cap C \subseteq A \subseteq B \cup C, [C \cap A \subseteq B \subseteq C \cup A.$$

Arătați că $A = B = C$.

Clasa a X-a

9. Dați exemplul de un număr natural $n > 5$ astfel încât 5^n se termină cu secvența 3125. Care este cel mai mic număr natural $n > 5$ cu această proprietate?

10. Există o infinitate de numere naturale n astfel încât $[n\sqrt{2}]$ să fie număr par. Există o infinitate de numere naturale n astfel încât $[n\sqrt{2}]$ să fie multiplu de 3. Generalizați cele două enunțuri demonstrând afirmațiile respective.

Clasa a XI-a

1. Fie A o matrice pătrată de ordin 2 cu elemente numere complexe, astfel încât A și A^2 au același rang. Arătați că matricele A^k au același rang pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

7. Dintr-o placă circulară de tablă se taie un sector de cerc de unghi α (în radiani). Determinați α pentru care conul obținut prin lipirea celor două raze de tăiere, are volum maxim.

Clasa a XII-a

4. Formula dezintegrării radioactive este $N_t = N_0 e^{-\lambda t}$, unde N_t reprezintă numărul de nuclee radioactive la momentul t , N_0 reprezintă numărul de nuclee radioactive la momentul inițial și λ este constanta de dezintegrare. Știind că cesiul are timpul de înjumătățire de 30 de ani, să se determine λ (izotopul cesiu 137 este responsabil de radiațiile de la Cernobâl).

5. Fie funcția $f : \left[0, \frac{1}{2011}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $\forall x \neq 0$ și $f(0) = 0$. Să se arate că o sfoară cu lungimea 2011 u nu este suficientă pentru a „măsura“ lungimea graficului funcției de mai sus.