O CONFIGURAȚIE CU UN PĂTRAT ȘI UN TRIUNGHI ECHILATERAL

Traian Preda[1)]

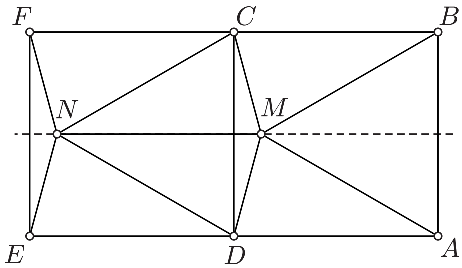
În cele ce urmează vom rezolva o problemă cunoscută (Propoziția 2) folosind o construcție auxiliară și o vom aplica în diverse probleme.

Propoziția 1. Fie $ABCD$ un pătrat și M un punct în interiorul său astfel încât triunghiul ABM să fie echilateral.

Atunci $\sphericalangle MCD = \sphericalangle MDC = 15^\circ$.

Demonstrație. Triunghiurile AMD și BMC sunt isoscele, cu $\sphericalangle MAD = \sphericalangle MBC = 30^\circ$. Rezultă că $\sphericalangle ADM = 75^\circ$ și $\sphericalangle BCM = 75^\circ$, din care obținem $\sphericalangle MCD = \sphericalangle MDC = 15^\circ$. □

Propoziția 2. (O reciprocă a propoziției 1). Fie $ABCD$ un pătrat și M un punct în interiorul său astfel încât $\sphericalangle MCD = \sphericalangle MDC = 15^\circ$. Atunci triunghiul ABM este echilateral.



Demonstrație. Construim, ca în figură, pătratul $CDEF$ și triunghiul echilateral NDC. Din Propoziția 1, $\sphericalangle NEF = \sphericalangle NFE = 15^\circ$ și atunci N aparține mediatoarei lui $[EF]$, care coincide cu mediatoarea lui $[CD]$. Dar M aparține mediatoarei lui $[CD]$ și atunci obținem că MN este mediatoarea lui $[CD]$, din care obținem că $MN \parallel ED$. Din $\sphericalangle ADM = \sphericalangle DEN = 75^\circ$ rezultă că $DM \parallel EN$. Astfel $EDMN$ este paralelogram, de unde obținem că $MN = ED$. Reiese $MN \parallel AD$ și $MN = AD$, deci $AMND$ este paralelogram și astfel $AM = DN = DC = AB$. Am obținut că $AM = AB$; analog $BM = AB$ și astfel triunghiul MAB este echilateral. □

[1)] Profesor, Colegiul Național „Grigore Moisil“, București.

Propoziția 3. (A doua reciprocă a propoziției 1). Fie $ABCD$ un dreptunghi și M un punct în interiorul său astfel încât triunghiul MAB să fie echilateral și $\sphericalangle MCD = \sphericalangle MDC = 15°$.

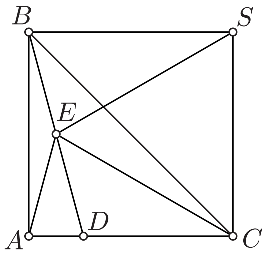
Atunci $ABCD$ este pătrat.

Demonstrație. Construim, ca în figura de la propoziția 2, pătratul $CDEF$ și punctul N în interiorul său astfel încât triunghiul NDC să fie echilateral. Ca și acolo rezultă că $DM \parallel EN$ și $DE \parallel MN$. Atunci $EDMN$ este paralelogram și $ED = MN$, $\sphericalangle EDN \equiv \sphericalangle DAM$ din care obținem că $DN \parallel AM$. Cum $AD \parallel MN$, reiese că $ADMN$ este paralelogram.

Rezultă atunci $AD = MN = ED$, deci $ABCD$ este pătrat.

Aplicații

1. (S.G.M. 10/2013, Artur Bălăucă) Fie triunghiul dreptunghic isoscel ABC, cu $AB \perp AC$, D un punct pe segmentul AC astfel încât $\sphericalangle ABD = 15°$ și E mijlocul segmentului BD. Aflați măsura unghiului $\sphericalangle DEC$.

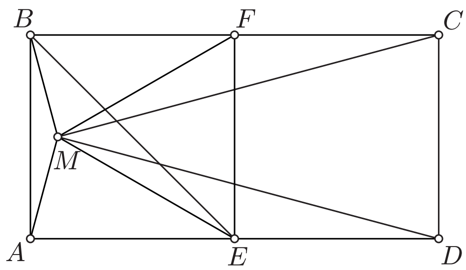


Soluție. Deoarece $\sphericalangle A = 90°$ și AE este mediană, rezultă că $AE = BE = ED$, din care obținem $\sphericalangle EAB = \sphericalangle EBA = 15°$.

Fie punctul S astfel încât $ABSC$ să fie pătrat. Din propoziția 2 obținem că triunghiul ESC este echilateral, din care rezultă că $\triangle CEA$ este isoscel, $\sphericalangle ACE = 30°$ și deducem că $\sphericalangle AEC = 75°$, iar $\sphericalangle AED = 30°$. Obținem astfel $\sphericalangle DEC = 75° - 30° = 45°$.

□

2. (G.M. 10/2023, Dan Grigorie, Lucian Țuțescu) Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = l$, $BC = 2l$ și M un punct aflat în interiorul să astfel încât $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = 15°$. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului MCD.



Soluție. Fie E și F mijloacele laturilor AD, respectiv BC. Atunci $AEFB$ este pătrat și, din propoziția 2, obținem că triunghiul MEF este echilateral. Astfel $MF = EF = AB$, deci MF este mediană în triunghiul MBC și $MF = \frac{1}{2}BC$. Rezultă că triunghiul BMC este dreptunghic în M și astfel $\sphericalangle BMC = 90°$; analog $\sphericalangle AMD = 90°$.

Reiese $\sphericalangle DMC = 360° - 2\cdot 90° - 150° = 30°$. În triunghiul isoscel MCD obținem $\sphericalangle MCD = \sphericalangle MDC = 75°$. □

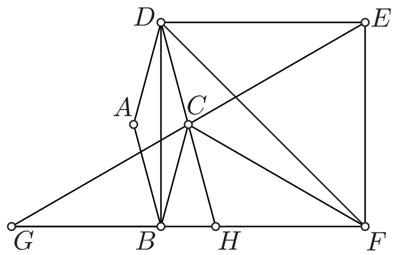
3. („Matematica de drag” 2007, Ioan Duicu) Se dă rombul $ABCD$ cu $\sphericalangle ABC = 30°$. Construim pătratul $BDEF$ astfel încât C să fie un punct în interiorul pătratului. Dacă $DC \cap BF = \{H\}$ și $EC \cap BF = \{G\}$, demonstrați că:

a) triunghiul CBH este isoscel;

b) FC este mediană în triunghiul EFG;

c) Triunghiul CGH este isoscel.

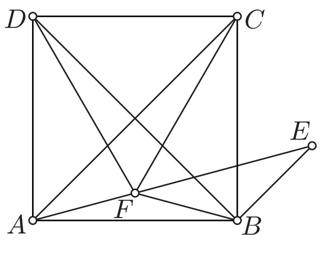
Soluție. a) Cum $\sphericalangle ABC = 30°$, rezultă că $\sphericalangle DBC = 15°$ și $\sphericalangle CBH = 75°$. Apoi $\sphericalangle BCD = 150°$ de unde $\sphericalangle BCH = 15°$ și $\sphericalangle BHC = 75°$. Obținem că triunghiul CBH este isoscel.



b) Avem $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CDB = 15°$. Din propoziția 2 rezultă că triunghiul CEF este echilateral și astfel $CF = CE$. Dar $\triangle EFG$ este dreptunghic, deci $CF = CE = CG$ și rezultă astfel că FC este mediană în $\triangle EFG$.

c) Din $CE = CD$ rezultă că triunghiul ECD este isoscel și astfel $\sphericalangle ECD = \sphericalangle EDC$. Dar $\sphericalangle ECD = \sphericalangle HCG$ (opuse la vârf) și $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CHG$ (alterne interne), din care rezultă că $\sphericalangle CHG = \sphericalangle HCG$, deci $\triangle GCH$ este isoscel. □

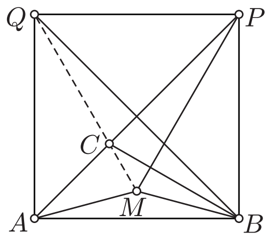
4. Se consideră pătratul $ABCD$ și punctul E în interiorul $\sphericalangle CAB$ astfel încât $\sphericalangle BAE = 15°$. Demonstrați că dreptele BE și BD sunt perpendiculare dacă și numai dacă $BD = AE$.



Soluție. Fie punctul $F \in (AE)$ astfel încât $\sphericalangle ABF = 15°$. Din propoziția 2 obținem că triunghiul ΔFCD este echilateral. Rezultă atunci că $\sphericalangle FDB = \sphericalangle EAB = 15°$. Cum $DF = AB$, rezultă că $BD = AE$ dacă și numai dacă $\triangle ABE \equiv \triangle DFB$, ceea ce se întâmplă dacă și numai dacă $\sphericalangle DBF \equiv \sphericalangle AEB$.

Dar $\sphericalangle DBF = 30^\circ$ și astfel condiția precedentă este echivalentă în continuare cu $\sphericalangle AEB = 30^\circ$, sau $\sphericalangle ABE = 135^\circ$, sau $\sphericalangle DBE = 90^\circ$, sau $DB \perp BE$ (deoarece $\sphericalangle ABD = 45^\circ$). □

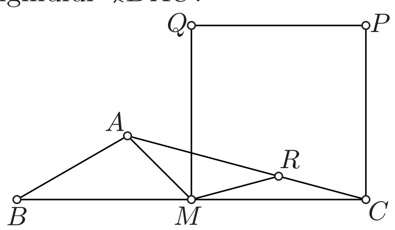
5. Fie triunghiul ABC în care $\sphericalangle BAC = 45^\circ$ și $\sphericalangle ABC = 30^\circ$. Construim punctul M în interiorul triunghiului astfel încât $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = 15^\circ$. Aflați măsura unghiului $\sphericalangle BMC$.



Soluție. Construim pătratul $ABPQ$ astfel încât punctul C să fie în interiorul pătratului. Cum $\sphericalangle BAC = 45^\circ$, rezultă că $C \in (AP)$. Apoi $\sphericalangle CBQ = 15^\circ$ deci, deoarece C se află pe mediatoarea lui BQ, obținem $\sphericalangle CQB = 15^\circ$. Din propoziția 2 rezultă că $QM = QA$ și $\sphericalangle MQB = 15^\circ$. Astfel punctele Q, C, M sunt coliniare și $\sphericalangle CMB = \sphericalangle QMB = 180^\circ - 15^\circ - 30^\circ = 135^\circ$.

□

6. (O.N.M. 2021, Mircea Lascu și Marius Stănean) În triunghiul ABC, M este mijlocul segmentului BC. Dacă $\sphericalangle AMB = 45^\circ$ și $\sphericalangle ACB = 15^\circ$, determinați măsura unghiului $\sphericalangle BAC$.



Soluție. Construim, ca în figură, pătratul $MCPQ$ și $R \in (AC)$ astfel încât $\sphericalangle RMC = \sphericalangle RCM = 15^\circ$. Din propoziția 2 obținem că triunghiul RPQ este echilateral.

Din $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMQ = 45^\circ$, $BM = MQ$, $AM = AM$ rezultă $\triangle AMB \equiv \triangle AMQ$ (L.U.L.) din care obținem $\sphericalangle ABM = \sphericalangle AQM$. Astfel $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MQR = 30^\circ$, din care rezultă că patrulaterul $AMRQ$ este inscriptibil și astfel $\sphericalangle AQM = \sphericalangle ARM = 30^\circ$. Reiese $\sphericalangle ABC = 30^\circ$ și $\sphericalangle BAC = 135^\circ$.

Bibliografie

[1] Beniamin Bogoșel, Stan Fulger, Mircea Lascu, Marius Stănean, *Probleme de geometrie – calculul măsurii unor unghiuri*, Editura Gil

[2] Sorana Ionescu, *Construcții auxiliare în rezolvarea problemelor de geometrie plană*, Editura Paralela 45.

[3] Colecția Gazeta Matematică.