Clasa a IX-a

13. a) Arătaţi că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $|x|+|x-1|+\ldots+|x-2024| = a$ să aibă soluţie unică.

b) Există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $|x|+|x-1|+\ldots+|x-2023| = a$ să aibă soluţie unică?

14. Arătaţi că $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2n} > \dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

15. a) Determinaţi numerele $a \in \mathbb{Z}$ pentru care ecuaţia $(x-a)(x-10)+1 = 0$ are toate rădăcinile întregi.

b) Determinaţi $m \in \mathbb{Z}$ pentru care ecuaţia $x^2-(m+1)x+m-2 = 0$ admite cel puţin o rădăcină întreagă.

16. Laturile AB şi CD ale unui patrulater convex $ABCD$ se intersectează în E, iar laturile AD şi BC se intersectează în F. Arătaţi că mijloacele segmentelor AC, BD şi EF sunt coliniare.

17. Fie A, B, C puncte pe o dreaptă d şi A', B', C' puncte pe dreapta d', atfel încât $AB' \cap A'B = \{M\}$, $AC' \cap A'C = \{N\}$, $BC' \cap CB' = \{P\}$. Arătaţi că punctele M, N, P sunt coliniare.

18. Fie $ABCDEF$ un hexagon înscris într-un cerc. Arătaţi că punctele $\{M\} = AB \cap DE$, $\{N\} = BC \cap EF$ şi $\{P\} = CD \cap AF$ sunt coliniare.

Clasa a X-a

19. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $7f(x)-63x = 16f([x])+16f(\{x\})-25$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că f este inversabilă şi determinaţi inversa funcţiei f.

20. Fie funcţia $f : (0,\infty) \to (1,\infty)$, $f(x) = x+\sqrt{x^2-x+1}$.

a) Arătaţi că funcţia f este bijectivă.

b) Rezolvaţi ecuaţia $(f \circ f)(x) = x$.

21. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Determinaţi numărul $z_1^{2023}+z_2^{2023}+z_3^{2023}$.

22. Fie $r > 0$. Considerăm mulţimea $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \text{ şi } |z-3\mathrm{i}| = r\}$. Determinaţi $r > 0$ astfel încât mulţimea M să aibă exact un element.

23. Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x} = 2\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{-x^2+4x-3}+2^{x+1}+4^{x-1} = 5$.

c) $2^x+2^{-x} = 2\cos\dfrac{x}{3}$.

24. a) Reprezentaţi grafic, în acelaşi reper cartezian xOy, funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4^x$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x+1$.

b) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $4^x = x+1$.