PROBLEME PENTRU EXAMENE NAȚIONALE[1)]

Clasa a IX-a

1. a) În câte zerouri se termină numărul 2024! ?

b) Câte numere naturale nenule n au proprietatea că $n!$ se termină în exact 100 de zerouri?

2. Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, există $k \in \mathbb{Z}$ și o alegere a semnelor $+$ și $-$ astfel încât să avem $n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \ldots \pm k^2$.

3. Dacă $n \in \mathbb{N}$, calculați produsele și demonstrați prin inducție matematică valabilitatea rezultatul obținut:

a) $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n}\right), n \geqslant 2;$

b) $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right), n \geqslant 2;$

c) $\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\dfrac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^3-1}{n^3+1}, n \geqslant 2.$

4. a) Precizați natura triunghiului în care bisectoarea din A și medianele din B, respectiv C sunt concurente.

b) Precizați natura triunghiului în care bisectoarele din A, respectiv B și mediana din C sunt concurente.

5. Fie triunghiul ABC și punctul M în interiorul acestuia. Notăm $\{D\} = BC \cap AM, \{E\} = AC \cap BM$ și $\{F\} = AB \cap CM$. Arătați că $\dfrac{EA}{EC} + \dfrac{FA}{FB} = \dfrac{MA}{MD}$.

6. Dacă notăm cu a, b, c, lungimile laturilor BC, AC, respectiv AB ale triunghiului ABC și cu A', B', respectiv C' picioarele bisectoarelor duse din A, B, respectiv C, arătați că:

a) $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AC};$

b) $ab\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}\right) + ac\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{CC'}\right) + bc\left(\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}\right) = \overrightarrow{0}.$

Clasa a X-a

1. Dacă $\varepsilon^3 = 1$ și $z \in \mathbb{C}$, arătați că:

a) $(z+\varepsilon)\left(z+\varepsilon^2\right) = (1+\varepsilon z)\left(1+\varepsilon^2 z\right);$

b) $\left(a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c\right)^3 = \left(b\varepsilon^2 + c\varepsilon + a\right)^3 = \left(c\varepsilon^2 + a\varepsilon + b\right)^3, \forall a, b, c \in \mathbb{C}.$

2. Demonstrați în $\mathbb{C}$ relațiile:

a) $|z_1+z_2|^2 + |z_2+z_3|^2 + |z_1+z_3|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1+z_2+z_3|^2;$

b) $|z_1+z_2| + |z_2+z_3| + |z_1+z_3| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1+z_2+z_3|.$

3. Determinați valoarea minimă a modulului numărului complex z pentru care $|z-3| + |z-4| = 5$.

4. Triunghiul ABC are afixele vârfurilor $z_A = 0, z_B = 4, z_C = 3i$. Calculați distanța dintre centrul cercului circumscris triunghiului și centrul de greutate.

5. a) Fie pătratul $ABCD$ și M, N, P, Q mijloacele laturilor. Arătați că pentru orice punct S din planul pătratului, expresia $SA^2 + SB^2 + SC^2 + SD^2 - SM^2 - SN^2 - SP^2 - SQ^2$ este constantă.

[1)] La problemele din această rubrică nu se primesc soluții. (N.R.)

b) Fie $ABCD$ un paralelogram și M un punct in planul său. Arătați că $\left(MA^2 + MC^2\right) - \left(MB^2 + MD^2\right)$ este constant.

6. Fie $ABCD$ un patrulater convex și M, N, E, F mijloacele segmentelor $[AB]$, $[CD]$, $[AC]$, $[BD]$. Arătați că:

a) mijloacele segmentelor $[MC]$, $[MD]$, $[NA]$, $[NB]$ sunt vârfurile unui paralelogram;

b) mijloacele segmentelor $[AF]$, $[BE]$, $[CF]$, $[DE]$ sunt vârfurile unui paralelogram;

c) dacă $AD^2 + BC^2 = 2 \cdot EF^2$, atunci $ABCD$ este paralelogram.