GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Fondată în anul 1895

Anul CXXIX nr. 11 **noiembrie 2024**

ARTICOLE ȘI NOTE MATEMATICE

ECUAȚII DIFERENȚIALE CU SOLUȚII ELEMENTARE[1)]

Vladimir Cerbu[2)] și Nicolai Gaitan[3)]

Abstract. This note shows how we can sometimes avoid using advanced concepts from the theory of differential equations, when solving „elementary" problems from this domain

Keywords: differential equation, elementary approach

MSC : 26A06, 34A05

În această notă matematică sunt prezentate, alături de soluțiile acestora, o serie de probleme ce implică ideea de ecuații cu derivate, propuse la concursurile naționale și regionale. Accentul este pus pe evitarea folosirii conceptelor avansate din teoria ecuațiilor diferențiale.

Problema 1. (ONM 2012) *Determinați toate funcțiile* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *cu* $f(0) = 0$ *și* $f'(x^2) = f(x), \forall x \geqslant 0$.

Prima soluție. Începem cu substituția $x \to \sqrt{x}$. Reiese că $f'(x) \geqslant 0$, $\forall x \geqslant 0$, deci f este o funcție crescătoare. De asemenea, și f' este o funcție crescătoare.

Fie $a = \sup\{x : f(x) = 0\}$.

Dacă $a \in [0, \infty)$, atunci $f(x) = 0, \forall x \in [0, a]$ și $f(x) > 0, \forall x \in (a, \infty)$ (din continuitatea și monotonia funcției f). Cu teorema lui Lagrange pe intervalul $[a, a+1]$, obținem că există $c \in (a, a+1)$ astfel încât $f(a+1) = f'(c)$.

Întorcându-ne la relația din enunț, avem că $f(a+1) = f(\sqrt{c})$ și, din faptul că f este crescătoare, rezultă că f este constantă pe $[\sqrt{c}, a+1]$.

[1)] Lucrarea a fost prezentată în cadrul celei de-a treia ediții a conferinței „International Symposium & International Student Workshop on Interdisciplinary Mathematics in the CiTi areas", desfășurată la Universitatea Națională de Știință și Tehnologie „Politehnica" București din perioada 26-28 iunie 2024.

[2)] Profesor, Colegiul Național Militar „Ștefan cel Mare", Câmpulung Moldovenesc,

[3)] Student, Academia Tehnică Militară „Ferdinand I", București.

Rezultă că $f'(x) = 0$, $\forall\, x \in [\sqrt{c}, a+1]$. Așadar, $f'(a+1) = f'(0) = 0$ și, din faptul că f' este crescătoare, obținem $f'(x) = 0, \forall x \in [0, a+1]$ și rezultă că $f'(c) = 0$ și $f(a+1) = 0$, ceea ce nu este posibil!

Rămâne că $a = \infty$, deci $f(x) = 0, \forall x \geqslant 0$. $\square$

A doua soluție: Similar începutului primei soluții, obținem că f' este crescătoare. Vom arăta prin inducție că $f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Pentru $n = 0$, afirmația se verifică.

Din teorema de medie a lui Lagrange pe intervalul $[n, n+1]$, obținem $c_n \in (n, n+1)$ astfel încât $f(n+1) - f(n) = f'(c_n)$. Deci $f(n+1) = f(\sqrt{c_n})$, și, prin faptul că f este crescătoare, rezultă că f este constantă pe $[\sqrt{c_n}, n+1]$. Altfel formulat, cea din urmă este $f'(x) = 0, \forall x \in [\sqrt{c_n}, n+1]$.

Prin $f'(n+1) = 0$, $f'(x) \geqslant 0$ și f' crescătoare, obținem $f'(x) = 0, \forall x \in [0, n+1]$. În continuare, obținem $f'(c_n) = 0$ și, în final, $f(n+1) = 0$.

Cum f este crescătoare și $f(\mathbb{N}) = \{0\}$, reiese $f(x) = 0, \forall x \geqslant 0$. $\square$

A treia soluție: Ca mai sus, f și f' sunt crescătoare.

Aplicând teorema lui Lagrange pentru funcția f pe [0,1], există $c \in (0,1)$ astfel încât $f(1) = f'(c)$. Atunci $f(1) = f(\sqrt{c})$ și, având f crescătoare, rezultă că f este constantă pe $[\sqrt{c}, 1]$, deci $f'(x) = 0, \forall x \in [\sqrt{c}, 1]$. Reiese $f(1) = f'(1) = 0$ și, din f crescătoare, rezultă că $f(x) = 0, \forall x \in [0,1]$.

Având că, pentru oricare $x \geqslant 1$, $x^2 \geqslant x$ și f' crescătoare, obținem că $f'(x^2) \geqslant f'(x)$. Deci $f(x) \geqslant f'(x)$.

Fie $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x} f(x)$. Evident $g(x) \geqslant 0, \forall x \in [1, \infty)$ și $g(1) = 0$. Funcția g este derivabilă și $g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) \leqslant 0, \forall x \in [1, \infty)$, deci g este descrescătoare, de unde obținem că $g(x) \leqslant g(1) = 0$, $\forall x \in [1, \infty)$. Deci $g(x) = 0$, $\forall x \in [1, \infty)$, așadar $f(x) = 0$, $\forall x \in [1, \infty)$.

Astfel, singura funcție cu proprietățile cerute este funcția nulă. $\square$

Problema 2.(ONM 2015) *Găsiți toate funcțiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac simultan următoarele:*

(1) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f'(x) = 0$;

(2) $f'(x) = 0, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0$.

Prima soluție. Fie f o asemenea funcție. Se vede imediat că $\forall x \in \mathbb{Z}$, $f(x) = f'(x) = 0$.

Dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ cu $f(\alpha) \neq 0$, fie $k = [\alpha]$. Pentru că f este continuă, există $m, M \in \mathbb{R}$, $m \leqslant M$ astfel încât $f([k, k+1]) = [m, M]$.

Dacă $f(\alpha) > 0$ atunci $M > 0$ și, având $f(k) = f(k+1) = 0$, există $x_1 \in (k, k+1)$ astfel încât $M = f(x_1)$. Aplicând teorema lui Fermat, urmează că $f'(x_1) = 0$, deci $f(x_1) = 0$, adică $M = 0$, contradicție!

Dacă $f(\alpha) < 0$, atunci $m < 0$ și, având $f(k) = f(k+1) = 0$, există $x_2 \in (k, k+1)$ astfel încât $m = f(x_2)$. Aplicând teorema lui Fermat, urmează că $f'(x_2) = 0$ și că $f(x_2) = 0$, de unde $m = 0$, contradicție!

În final, pentru oricare $\alpha \in \mathbb{R}$ avem că $f(\alpha) = 0$, ceea ce înseamnă că f este funcția nulă, care satisface cerințele problemei. $\square$

A doua soluție. Dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ cu $f(\alpha) \neq 0$, atunci există o vecinătate (u, v) a lui α astfel încât $f(x) \neq 0, \forall x \in (u, v)$.

Fie $a = \sup\{x \in (-\infty, u) \mid f(x) = 0\}$ și $b = \inf\{x \in (v, \infty) \mid f(x) = 0\}$. Pentru că f este continuă, avem $f(a) = f(b) = 0$ și $f(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ (1).

Din aplicarea teoremei lui Rolle pentru funcția f pe intervalul $[a, b]$, obținem că există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$. Acest lucru este în contradicție cu (1).

În concluzie, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, avem $f(\alpha) = 0$, deci f este funcția nulă. $\square$

Problema 3. (Matematica de drag, 2016) *Arătați că nu există funcții bijective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât f să fie o primitivă a funcției $f \circ f$.*

Soluție. Presupunem că $f \circ f$ admite primitiva f. Asta înseamnă că f este derivabilă și că $f'(x) = f(f(x)), \forall x \in \mathbb{R}$.

Deoarece f este bijectivă, f este injectivă. În plus f este derivabilă, deci are proprietatea lui Darboux. Punând acestea la un loc, obținem f este strict monotonă.

Având că f este derivabilă și monotonă, înseamnă că $f'(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$, sau $f'(x) \leqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că $\mathrm{Im}(f') \subset [0, \infty)$ sau $\mathrm{Im}(f') \subset (-\infty, 0]$. Dar $f' = f \circ f$ care este bijectivă, deci $\mathrm{Im}(f') = \mathrm{Im}(f \circ f) = \mathbb{R}$, contradicție! $\square$

Problema 4. (Matematica de drag, 2019) *Găsiți toate funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit primitive și verifică relația*

$$\big(xf(x) - 2F(x)\big)\big(F(x) - x^2\big) = 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

unde F este o primitivă pentru f.

Soluție. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = F(x) - x^2$. Atunci $f(x) = F'(x) = 2x + g'(x)$ și relația din enunț devine $\big(2x^2 + xg'(x) - 2x^2 - 2g(x)\big)g(x) = 0$, sau $xg'(x)g(x) - 2g^2(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Rezultă că pentru orice x nenul este adevărată relația

$$\left(\frac{g^2(x)}{x^4}\right)' = \frac{2g(x)g'(x) \cdot x^4 - 4x^3 g^2(x)}{x^8} = \frac{2x^3\left(xg'(x)g(x) - 2g^2(x)\right)}{x^8} = 0,$$

de unde deducem că $\dfrac{g^2(x)}{x^4}$ este constantă pe fiecare dintre intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$.

Având g^2 continuă în 0, deducem că există $a, b \geqslant 0$ astfel încât:

$$g^2(x) = \begin{cases} ax^4 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ bx^4 & , x > 0 \end{cases}.$$

Vom arăta că $g(x) = \sqrt{a}x^2$, $\forall x < 0$ sau $g(x) = -\sqrt{a}x^2$, $\forall x < 0$. Dacă $a = 0$ este evident. Fie $a > 0$. Atunci funcția g nu se anulează pe $(-\infty, 0)$, deci înseamnă că are semn constant. În final, $g(x) = \sqrt{a}x^2, \forall x < 0$ sau $g(x) = -\sqrt{a}x^2, \forall x < 0$. Similar pentru $(0, \infty)$ obținem:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{a}x^2 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ \sqrt{b}x^2 & , x > 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad g(x) = \begin{cases} -\sqrt{a}x^2 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ \sqrt{b}x^2 & , x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{a}x^2 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -\sqrt{b}x^2 & , x > 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad g(x) = \begin{cases} -\sqrt{a}x^2 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -\sqrt{b}x^2 & , x > 0 \end{cases}.$$

Având $F(x) = g(x) + x^2, \forall x \in \mathbb{R}$, și $1 \pm \sqrt{a}$ și $1 \pm \sqrt{b}$ parcurgând întreaga mulțime $\mathbb{R}$ atunci când a și b parcurg $[0, \infty)$, obținem că

$$F(x) = \begin{cases} cx^2 & , x < 0 \\ dx^2 & , x \geqslant 0 \end{cases}, \text{ deci } f(x) = \begin{cases} \alpha x & , x < 0 \\ \beta x & , x \geqslant 0 \end{cases}, \text{unde } \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Este ușor de verificat că aceste funcții îndeplinesc cerințele. □

Problema 5. (ONM 2015) *Găsiți toate funcțiile $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ care au primitive și satisfac condițiile:*

i) *f este crescătoare;*

ii) *$F(x + y) \leqslant F(x) + F(y), \forall x, y \in [0, \infty)$, unde F este primitiva funcției f care are proprietatea $F(0) = 0$.*

Soluție. Punând $x = y > 0$ avem că $F(2x) \leqslant 2F(x)$, de unde $F(2x) - F(x) \leqslant F(x)$.

Din teorema lui Lagrange urmează că există $c_x \in (x, 2x)$ astfel încât $xf(c_x) = F(2x) - F(x) \leqslant F(x)$. Pentru că f este crescătoare, avem $f(x) \leqslant f(c_x)$, deci $xf(x) \leqslant F(x)$. Reiese $\dfrac{xf(x) - F(x)}{x^2} \leqslant 0$, sau $\left(\dfrac{F(x)}{x}\right)' \leqslant 0$, $\forall x \in (0, \infty)$ și rezultă că funcția $\dfrac{F(x)}{x}$ este descrescătoare.

Cum f este crescătoare, funcția F este convexă, iar din $F(0) = 0$ obținem că funcția $\dfrac{F(x)}{x}$ este crescătoare pe $(0, \infty)$. Ca atare, $\dfrac{F(x)}{x}$ este constantă pe $(0, \infty)$.

Având $\dfrac{F(x)}{x} = k$ obținem $F(x) = kx$, deci $f(x) = k$, $\forall x \in (0, \infty)$. Cum f este primitivabilă, rezultă că f are proprietatea lui Darboux, deci $f(x) = k$, $\forall x \in [0, \infty)$. □

Problema 6. (SHL ONM 2019) *Fie n un număr natural nenul. Găsiți toate funcțiile $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ care sunt de n ori derivabile, care au derivata* *de ordin n mărginită inferior și*

$$x\int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t, \forall x \geqslant 0.$$

Soluție. Fie funcția $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Cum funcția f este continuă, rezultă că F este derivabilă și $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [0,\infty)$.

Având funcția f de n ori derivabilă, funcția F este de $n+1$ ori derivabilă și $F^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x)$.

Pentru $x \in (0,\infty)$, relația din enunț devine

$$x(F(x+1) - F(x)) = F(x) \iff \frac{F(x+1)}{x+1} = \frac{F(x)}{x} \iff g(x+1) = g(x),$$

unde $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{F(x)}{x}$. Este clar că g este de $n+1$ ori derivabilă și periodică, cu perioada 1. Folosind formula lui Leibnitz de derivare, din $F(x) = xg(x)$ obținem

$$f^{(n)}(x) = F^{(n+1)}(x) = \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i x^{(i)} g^{(n+1-i)}(x) = xg^{(n+1)}(x) + (n+1)g^{(n)}(x).$$

Fie $x_0 \in (0,\infty)$ și $k \in \mathbb{N}$. Funcțiile $g^{(n)}$ și $g^{(n+1)}$ fiind periodice cu perioada 1, avem

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x_0+k) &= (x_0+k)g^{(n+1)}(x_0+k) + ng^{(n)}(x_0+k) = \\ &= (x_0+k)g^{(n+1)}(x_0) + ng^{(n)}(x_0). \end{aligned} \tag{1}$$

Din enunțul problemei, derivata de ordin n a funcției f este mărginită inferior, deci există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f^{(n)}(x) \geqslant a, \forall x \in (0,\infty)$. Din (1) avem că $(x_0+k)g^{(n+1)}(x_0) + ng^{(n)}(x_0) \geqslant a$. Prin împărțire la x_0+k avem că $g^{(n+1)}(x_0) + \dfrac{ng^{(n)}(x_0)}{x_0+k} \geqslant \dfrac{a}{x_0+k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Trecând la limită cu $k \to \infty$ rezultă că $g^{(n+1)}(x_0) \geqslant 0$.

Având x_0 ales în mod arbitrar, deducem că $g^{(n+1)}(x) \geqslant 0, \forall x \in (0,\infty)$, deci funcția $g^{(n)}$ este crescătoare. Luând în considerare faptul că o funcție care este periodică și monotonă este constantă, rezultă că funcția $g^{(n)}$ este constantă, deci g este o funcție polinomială.

Dacă $\operatorname{grad}(g) \geqslant 1$, funcția g nu este constantă și este periodică, deci aceasta nu are limită la $+\infty$. Dar $\operatorname{grad}(g) \geqslant 1$ implică că $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty$, ceea ce este o contradicție! Astfel, obținem că $\operatorname{grad}(g) < 1$, ceea ce înseamnă că există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $g(x) = c, \forall x \in (0,\infty)$. Urmează că $F(x) = cx$ și $f(x) = F'(x) = c, \forall x \in (0,\infty)$. Având f continuă în 0, rezultă că $f(x) = c$, $\forall x \in [0,\infty)$.

Este simplu de verificat că toate funcțiile constante îndeplinesc cerințele.

Bibliografie

[1] Radu Miculescu, *Probleme de calcul integral*, Editura Gil
[2] *Colecția „Gazeta Matematică"*
[3] cnlr.ro, *Concursul „Matematica, de drag"*