PENTRU CERCURILE DE ELEVI

PUNCTE LATICIALE, TEOREMA LUI PICK ȘI TEOREMA LUI MINKOWSKI

Lucian-Georges Lăduncă[1)]

În această lecție prezentăm două teoreme și mai multe aplicații ale lor, legate de puncte laticiale. Demonstrații foarte clare ale lor se găsesc în [3] sau [9].

Considerăm planul euclidian raportat la un sistem ortogonal de axe.

Definiție. *Un punct $P(a,b)$ din planul euclidian este* laticial *dacă $a, b \in \mathbb{Z}$.*

Teoremă. (Pick, 1899) *Fie P un poligon în plan cu toate vârfurile puncte laticeale. Dacă poligonul are f puncte laticiale pe laturi (inclusiv vârfurile) și i puncte laticiale în interiorul său, atunci*

$$\text{Aria}(P) = i + \frac{f}{2} - 1.$$

Teoremă. (Hermann Minkowski) *Dacă un poligon convex simetric față de centrul său (care este punct laticeal) nu mai conține în interiorul său alte puncte laticeale, atunci aria sa este < 4 (ca unitate de arie se consideră aria unui pătrat unitate al rețelei).*

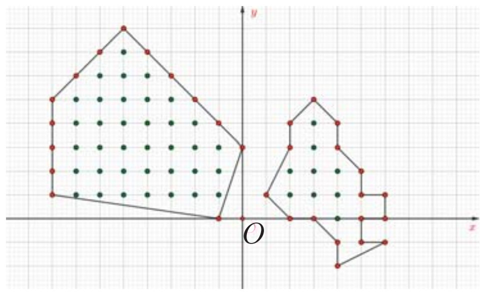
Observații. 1. Din teorema lui Minkowski rezultă că orice poligon convex, simetric față de centru, de arie $\geqslant 4$ și cu centrul într-un nod al rețelei de pătrate, conține în interiorul său noduri ale rețelei diferite de centru (datorită simetriei centrale, în afară de centru, el mai conține cel puțin încă două noduri ale rețelei simetrice față de centru).

[1)] Profesor, Liceul Teoretic de Informatică „Gr. Moisil“, Iași.

2. În enunțul teoremei lui Minkowski, putem înlocui poligonul convex cu o mulțime $S \subset \mathbb{R}^2$, convexă, mărginită, închisă și simetrică față de origine. În rest la fel, dacă aria $S \geqslant 4$ atunci S mai conține încă un punct laticeal.

Aplicații

1. Aflați aria poligoanelor de mai jos folosind teorema lui Pick.



Aria pentagonului $= 36+\frac{14}{2}-1 = 42$.

Aria poligonului „broscuță” este $9 + \frac{17}{2} - 1 = \frac{33}{2}$. (verificați)

2. Triunghiul ABC este ascuțitunghic și are toate vârfurile puncte laticiale. Demonstrați că suprafața $[ABC]$ conține cel puțin un punct laticial.

Soluție. Presupunem prin reducere la absurd că $i = 0$. Deoarece $f = 3$, aplicând teorema lui Pick, $A_{ABC} = i + \frac{f}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. Pe de altă parte, din formula lui Heron găsim

$$A_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{4}\sqrt{2\sum b^2c^2 - \sum a^2}.$$

Așadar $-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = 4$, de unde

$$a^2 \cdot \underbrace{(b^2 + c^2 - a^2)}_{>0} + b^2 \cdot \underbrace{(c^2 + a^2 - b^2)}_{>0} + c^2 \cdot \underbrace{(a^2 + b^2 - c^2)}_{>0} = 4.$$

Deoarece vârfurile ΔABC sunt puncte laticiale, $a^2, b^2, c^2 \in \mathbb{N}^*$. Așadar, două din cele trei produse sunt 1 și cel de-al treilea este 2. Atunci, de exemplu, $a^2 \cdot (b^2 + c^2 - a^2) = 1$, $b^2 \cdot (c^2 + a^2 - b^2) = 1$, $c^2 \cdot (a^2 + b^2 - c^2) = 2$, contradicție (din primele două relații ale sistemului avem $a^2 = b^2 = 1 = c^2$, în contradicție cu ultima ecuație a sistemului).

3. i) Să se arate că nu există nici un triunghi echilateral cu toate vârfurile puncte laticeale.

ii) Să se arate că nu există nici un poligon regulat cu 2004 laturi, având toate vârfurile puncte laticeale.

Soluție. i) Presupunem că ar exista un ΔABC echilateral cu toate vârfurile puncte laticeale. Din formula lui Pick deducem că $A_{ABC} \in \mathbb{Q}$. Dar $A_{ABC} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{4A_{ABC}}{l^2} \in \mathbb{Q}$, fals (evident $l^2 = \mathrm{dist}^2(A, B) = \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(x_B - x_A\right)^2 \in \mathbb{Z}$).

ii) Presupunem că ar exista un poligon regulat $A_1A_2A_3 \dots A_{2004}$ cu toate vârfurile puncte laticeale. Din teorema lui Pick avem că aria sa este număr rațional. Pe de altă parte, apotema poligonului este $h = \frac{l}{2\text{tg}(\pi/2004)}$ și de aici aria $\mathcal{A}_{A_1A_2A_3\dots A_{2004}} = \frac{l^2}{4\text{tg}(\pi/2004} \cdot 2004$, de unde $\text{tg}(\pi/2004) \in \mathbb{Q}$, contradicție (dacă $\text{tg}(\pi/2004) \in \mathbb{Q}$ atunci și $\text{tg}\, 668 \cdot (\pi/2004) = \text{tg}(\pi/3) = \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, fals).

4. Demonstrați că toate patrulaterele convexe de arie 1, cu vârfurile puncte laticeale, sunt paralelograme.

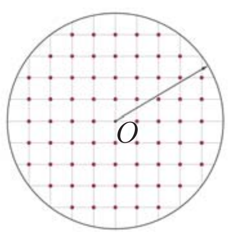
Soluție: Fie $ABCD$ un patrulater convex de arie 1 cu vârfurile A, B, C, D laticeale.

$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ACD} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (dacă un triunghi are vârfurile puncte laticeale atunci din teorema lui Pick deducem că aria triunghiului este cel puțin $\frac{1}{2}$).

Deoarece $\mathcal{A}_{ABCD} = 1$ deducem că $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} = \mathcal{A}_{ADC}$. Analog $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{BCD} = \frac{1}{2}$. Așadar $\mathcal{A}_{ADC} = \mathcal{A}_{BDC}$, de unde $AB \parallel CD$.

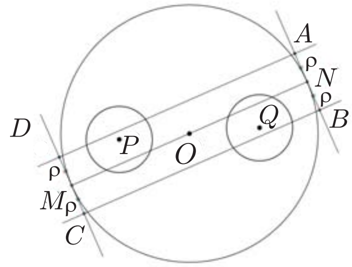
Analog $AD \parallel BC$. Deducem astfel că $ABCD$ este paralelogram.

5. Într-o grădină rotundă de rază 50, copacii sunt așezați în nodurile rețelei de pătrate de latură 1. În centrul grădinii se află un chioșc O.

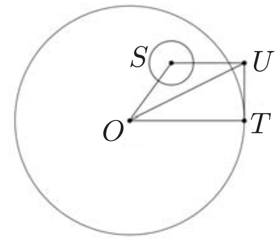


Atât timp cât copacii rămân destul de subțiri (se consideră că sunt rotunzi și de aceeași grosime), ei nu acoperă vederea din chioșc (adică există raze duse din centrul grădinii care nu întâlnesc nici un copac). Când însă copacii vor crește, ei vor obtura total vederea din chioșc. Demonstrați că, atât timp cât raza copacului este mai mică decât $\frac{1}{\sqrt{2501}}$, vederea din chioșc nu va fi acoperită. Însă, dacă această rază crește peste $\frac{1}{50}$, vederea din chioșc va fi complet acoperită.

Soluție. Mai întâi demonstrăm că în cazul în care raza ρ a tuturor copacilor este mai mare decât $\frac{1}{50}$, atunci vederea din centrul grădinii este total obturată. Ducem un diametru oarecare din centrul grădinii și vom arăta că un observator din chioșc nu vede capătul grădinii nici în direcția OM, nici în direcția ON. Construim dreptunghiul $ABCD$ ca în desenul de mai jos (CD și AB sunt tangentele la cerc duse în M și N, $MD = MC = NA = NB = \rho$). Avem $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot MN = 2\rho \cdot 100 > 2 \cdot \frac{1}{50} \cdot 100 = 4$. Din teorema lui Minkowski rezultă că în interiorul dreptunghiului $ABCD$ există doi copaci simetrici față de O. Copacii de rază ρ, care cresc în aceste puncte P și Q vor intersecta razele OM și ON. De aici rezultă că un observator din centrul grădinii va avea vederea obturată și în direcția OM și în direcția ON (vezi desenul (a)).



(a)



(b)

Demonstrăm acum că în cazul $\rho < \frac{1}{\sqrt{2501}}$, vor exista fâșii de lumină, adică vederea din centrul grădinii nu este obturată. Considerăm desenul (b). OT este o dreaptă din rețeaua de pătrate care trece prin centrul grădinii, TU este tangentă la cerc de lungime 1. Evident U este un vârf al rețelei de pătrate, iar în interiorul lui OU nu va fi situat nici un vârf al rețelei $OU = \sqrt{50^2 + 1^2} = \sqrt{2501}$. Considerăm S un vârf al rețelei de pătrate din interiorul grădinii, cel mai apropiat de U.

Din formula lui Pick, $A_{OUS} = i + \frac{f}{2} - 1 \geqslant \frac{1}{2}$. Dar, $A_{OUS} = \frac{OU \cdot \mathrm{dist}(S,OU)}{2}$ $= \frac{\sqrt{2501}}{2} \cdot \mathrm{dist}(S, OU)$, deci $\mathrm{dist}(S, OU) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2501}}$. Așadar, deducem că acel copac de rază $\rho < \frac{1}{\sqrt{2501}}$ care crește în S nu intersectează raza OU. Astfel, direcția OU nu este obturată de niciun copac.

6. a) Fie $A(3, 6)$; $B(1, 0)$ și $O(0, 0)$. Arătați că în interiorul ΔAOB există un singur punct laticeal P.

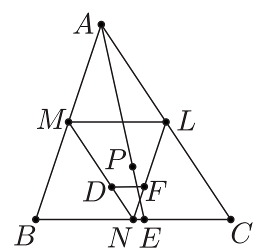
Notăm $AP \cap OB = \{E\}$. Demonstrați că $\frac{AP}{PE} = 5$.

b) În planul XOY fie $\mathcal{T}$ mulțimea tuturor triunghiurilor cu vârfurile laticeale, care conțin în interior exact un punct laticeal. Considerăm un Δ arbitrar din $\mathcal{T}$ cu vârfurile A, B, C și P unicul punct laticeal interior. Fie E intersecția dreptelor AP și BC. Să se afle $\max\limits_{\Delta ABC \in \mathcal{T}} \dfrac{AP}{PE}$.

Soluție. a) Pe de o parte, $A_{ABC} = \frac{OB \cdot \mathrm{dist}(A,OB)}{2} = \frac{1 \cdot 6}{2} = 3$. Pe de altă parte, din teorema lui Pick avem $A_{ABC} = i + \frac{f}{2} - 1 = i + \frac{6}{2} - 1 = i + 2$. Așadar $i = 1$, adică avem un singur punct laticeal P în interiorul ΔAOB.

Deducem ușor $P(1, 1)$; $E\left(\frac{3}{5}, 0\right)$ și $\frac{AP}{PE} = 5$.

b) Fie ΔABC din $\mathcal{T}$. Notăm cu M, N, L mijloacele laturilor AB, BC și AC.



Unicul punct laticeal P nu se poate afla în interiorul ΔAML (dacă, prin absurd, $P \in \mathrm{int}\, \Delta AML$, considerând omotetia de centru A și raport 2 am obține că imaginea lui P prin această omotetie ar fi încă un punct laticeal în interiorul ΔABC). Analog P nu este în interiorul ΔBMN, nici în interiorul

ΔCNL. Deci P se află în interiorul sau pe laturile ΔMNL (mai puțin în vârfuri). Considerăm pe segmentele MN și LN două puncte D, F astfel încât $\frac{MD}{DN} = \frac{LF}{FN} = 2$. Avem $DF \parallel ML \parallel BC$.

De asemenea P este pe laturile sau în interiorul trapezului $MLFD$ (dacă, prin absurd, $P \in \operatorname{int} DNF$, considerând omotetia de centru N și raport 3 deducem că imaginea punctului P prin această omotetie, să zicem punctul R ar fi tot laticeal. Aceasta deoarece din $\overrightarrow{NR} = 3\overrightarrow{NP} \Rightarrow x_P = \frac{x_R+2x_N}{3}$ și $y_P = \frac{y_R+2y_N}{3}$. De aici $x_R = 3x_P - (x_B + x_C) \in \mathbb{Z}$ și $y_R = 3y_P - (y_B + y_C) \in \mathbb{Z}$).

Deoarece distanța de la A la DF este de 5 ori mai mare decât distanța dintre dreptele paralele DF și BC, rezultă că raportul cerut $\frac{AP}{PE} \leqslant 5$. Valoarea maximă este 5 și această valoare se poate atinge efectiv (vezi a)).

7. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ există în planul euclidian un cerc ce conține în interiorul său exact n puncte laticeale (Steinhaus-Sierpinski).

Soluție. Fie punctul $C\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$. Demonstrăm mai întâi că dacă $M(a,b)$ și $P(u,v)$ sunt două puncte laticeale din plan situate la aceeași distanță față de punctul C atunci $M = P$. Fie așadar $\operatorname{dist}(M,C) = \operatorname{dist}(P,C)$. Atunci $\sqrt{\left(a-\sqrt{2}\right)^2 + \left(b-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(u-\sqrt{2}\right)^2 + \left(v-\frac{1}{3}\right)^2}$, deci $a^2 - 2a\sqrt{2} + 2 + b^2 - \frac{2b}{3} + \frac{1}{9} = u^2 - 2u\sqrt{2} + 2 + v^2 - \frac{2v}{3} + \frac{1}{9}$, de unde

$$\begin{cases} \sqrt{2}\left(2u-2a\right) = u^2 - a^2 + v^2 - b^2 + \frac{2}{3}(b-v) \\ a,b,u,v \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Reiese $2u = 2a$ și $u^2 + v^2 - a^2 - b^2 + \frac{2}{3}(b-v) = 0$, adică $a = u$ și $v^2 - b^2 - \frac{2}{3}(v-b) = 0$, sau încă $a = u$ și $(v-b)\left(v+b-\frac{2}{3}\right) = 0$.

Deoarece $b, v \in \mathbb{Z}$ obținem că $b = v$. Așadar $M = P$.

Ținând cont de ceea ce am demonstrat mai sus, deducem că punctele laticeale din plan se pot ordona în funcție de distanțele lor până la $C\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$. Fie astfel M_1 punctul laticeal a cărui distanță d_1 până la $C\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$ este cea mai mică, M_2 următorul situat la distanța $d_2 > d_1$, ș.a.m.d. Obținem astfel șirul de puncte M_1, M_2, M_3, …, M_n, … situate la distanțele $d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_n < \ldots$ față de $C\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$. Luăm așadar cercul cu centrul $C\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$ și rază d_{n+1}. Acest cerc conține în interior exact n puncte laticeale.

8. Notăm cu $n(r)$ numărul de puncte cu coordonate întregi pe un cerc de rază $r > 1$. Demonstrați că $n(r) < 6\sqrt[3]{\pi r^2}$.

Soluție. Presupunem că pe cercul de rază $r > 1$ se află n puncte laticeale. Demonstrăm că $n < 6\sqrt[3]{\pi r^2}$. Dacă $n \leqslant 8$ inegalitatea este evidentă deoarece $8 < 6\sqrt[3]{\pi r^2}$. Putem presupune așadar că $n \geqslant 9$ și fie P_1, P_2, P_3, …, P_n punctele laticeale de pe cerc dispuse, de exemplu, în sensul deplasării acelor de ceasornic. Deoarece $\widehat{P_1P_3}+\widehat{P_2P_4}+\ldots+\widehat{P_{n-1}P_1}+\widehat{P_nP_2}=4\pi$, cel puțin unul dintre arcele $\widehat{P_iP_{i+2}}$ are măsura cel mult are măsura cel mult $4\pi/n$. Fără restrângerea generalității presupunem că acest arc este $\widehat{P_1P_3}$. Dacă avem un triunghi ABC înscris în arcul de unghi $\dfrac{4\pi}{n}$, aria ΔABC este maximă dacă A și C sunt capetele arcului și B este mijlocul arcului, $m(\sphericalangle CAB)=m(\sphericalangle ACB)=\dfrac{\pi}{n}$ și $m(\sphericalangle ABC)=\pi-\dfrac{2\pi}{n}$.

$$A_{ABC}=\frac{abc}{4r}=\frac{2r\sin\frac{\pi}{n}2r\sin\frac{\pi}{n}2r\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right)}{4r}=2r^2\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}$$
$$<2r^2\frac{\pi}{n}\frac{\pi}{n}\frac{2\pi}{n}=\frac{4\pi^3r^2}{n^3}$$

(am utilizat $\sin x<x$, $\forall x>0$).

În cazul nostru, avem $A_{P_1P_2P_3}<\frac{4\pi^3r^2}{n^3}$. Pe de altă parte, $A_{P_1P_2P_3}\geqslant\frac{1}{2}$ (utilizând teorema lui Pick). Deci

$$\frac{1}{2}<\frac{4\pi^3r^2}{n^3}\Rightarrow n^3<8\pi^3r^2\Rightarrow n<2\pi\sqrt[3]{r^2}<6\sqrt[3]{\pi r^2}.$$

9. Demonstrați că pentru orice număr real a și orice număr natural nenul n există numerele întregi p,q, cu $q>0$, astfel încât $\left|a-\dfrac{p}{q}\right|\leqslant\dfrac{1}{nq}$.

Soluție: Considerăm mulțimea

$$S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2 \;\middle|\; |ax-y|\leqslant\frac{1}{n}\text{ și }|x|\leqslant n\right\}.$$

Identificăm mulțimea S: $|ax-y|\leqslant\dfrac{1}{n}\Rightarrow ax-\dfrac{1}{n}\leqslant y\leqslant ax+\dfrac{1}{n}$, deci S este un paralelogram delimitat de dreptele $x=n$, $x=-n$, $y=ax-\frac{1}{n}$ și $y=ax+\frac{1}{n}$. Aria acestui paralelogram este $n\cdot\frac{2}{n}=4$ deci, conform teoremei lui Minkovski, există un punct laticeal $L(q,p)$, diferit de origine, situat în interiorul lui S. Putem presupune $q>0$, datorită simetriei centrale a lui S.

Avem $|aq-p|\leqslant\frac{1}{n}$, de unde $\left|a-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{nq}$.

Propunem spre rezolvare următoarele probleme:

1) Demonstrați că pătratele sunt singurele poligoane regulate care au toate vârfurile în nodurile unei rețele laticeale.

2) Să se demonstreze că pe cercul ce trece prin punctele $(0,0)$; $(0,1978)$; $(1978,0)$ și $(1978,1978)$ nu există alt punct care să aibă ambele coordonate întregi (laticeal). (O.I.M. 1978)

3) Arătați că există un cerc pe a cărui circumferință se află exact n puncte laticeale, $\forall n\in\mathbb{N}$. Mai precis, dacă $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$, atunci pe cercul cu centrul în $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ și rază $\frac{1}{3} \cdot 5^k$ se află exact n puncte laticeale. Dacă $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, atunci pe cercul de centru $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ și rază $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5^{k-1}}$ sunt exact n puncte laticeale. (A. Schinzel)

Bibliografie

[1] V. Baltag, B. Cinic, V. Guțu, *Olimpiadele de matematică ale Republicii Moldova, (1957-2001)*, Edit. Gil, 2010.
[2] A. Bălăucă, C. Budeanu, G. Mîrșanu, A. Boțan, B. Maxim, *17 Ediții ale Concursului Interjudețean de Matematică "Dimitrie Pompeiu"*, Edit. Taida, 2017.
[3] D. Bușneag, F. Chirteș, D. Piciu, *Complemente de aritmetică și teoria elementară a numerelor*, Edit. Gil, 2007.
[4] J. Crînganu, C. Ursu, D. M. Bătinețu-Giurgiu, *Culegere de probleme clasa a IX-a*, Edit. Porto Franco, 1992.
[5] I. Cuculescu, *Olimpiadele Internaționale de Matematică ale elevilor*, Edit. Tehnică, 1984.
[6] A. Engel, *Probleme de matematică, strategii de rezolvare*, traducere de M. Bălună, Edit. Gil, 2006.
[7] M. Ganga, *Probleme elementare de matematică*, Edit. MATH PRESS, 2003.
[8] C. Gherghe, *Note de curs - Școala de vară SSMR*, Bușteni, iulie 2013.
[9] A. M. Iaglom, I. M. Iaglom, *Probleme neelementare tratate elementar*, Edit. Tehnică, 1983.
[10] V. Pop, M. Teleucă, *Probleme de combinatorică elementară*, Edit. MATRIX ROM, 2012.
[11] W. Sierpinski, *Ce știm și ce nu știm despre numerele prime*, Edit. Științifică, 1966.