Model de test pentru Bacalaureat

SUBIECTUL I

1. Câte elemente are mulţimea $(\log_2 5, \log_2 9) \cap \mathbb{Z}$?

2. Dreptele $x = 1$ şi $x = 2$ sunt axe de simetrie ale graficului funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Arătaţi că funcţia f este periodică.

3. Rezolvaţi, în mulţimea numerelor reale, ecuaţia $\sqrt[3]{x+1} = x + 1$.

4. Determinaţi numărul funcţiilor pare $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{1, 2, 3\}$.

5. Fie dreptele d_1 şi d_2 de ecuaţii $x - 3y + 1 = 0$, respectiv $3x + y + 2 = 0$, a un număr real şi punctul $P(0, a)$. Determinaţi valorile lui a pentru care punctul P este egal depărtat de dreptele d_1 şi d_2.

6. Arătaţi că $\sin x + \sqrt{3}\cos x \leq 2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele

$$A(m) = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}, \ m \in \mathbb{R} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Rezolvaţi ecuaţia $\det(A(m)) = 0$, $m \in \mathbb{R}$.

b) Arătaţi că $A^{-1}(-1) = \frac{1}{2}A(0)$.

c) Determinaţi $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ astfel încât $A(-1) \cdot X = B$.

2. Pe mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = \dfrac{1}{5}xy + 3x + 3y + 30$.

a) Aflaţi numărul raţional a pentru care $x * a = a, \forall x \in \mathbb{Q}$.

b) Daţi exemplu de două numere raţionale x şi y care nu sunt numere întregi şi pentru care $x * y$ este număr întreg.

c) Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 5x - 15$ are proprietatea $f(xy) = f(x) * f(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & , x \in (0,\infty) \setminus \{1\} \\ 1 & , x = 1 \ . \end{cases}$$

a) Arătaţi că f este continuă în punctul $x_0 = 1$.

b) Stabiliţi dacă f este derivabilă în punctul $x_0 = 1$.

c) Arătaţi că f este descrescătoare.

2. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{t+1}\mathrm{d}t$.

a) Calculaţi $f(1)$.

b) Arătaţi că $f(x+1)+f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

c) Arătaţi că $\dfrac{1}{2(x+1)} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x}$, $\forall x \in (1, \infty)$.