Clasa a IX-a

1. Consideră un triunghi ABC şi semidreapta $(AD$, cu $D \in (BC)$, bisectoarea unghiului A. Notăm lungimile laturilor $(BC), (AC), (AB)$ale triunghiului ABC cu a, b, respectiv c.

a) Arătaţi că $(b+c) \cdot \overrightarrow{AD} = b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) Notăm cu I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Arătaţi că, pentru orice punct M din plan, avem

$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{a+b+c}(a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}).$$

2. Pe laturile $(BC), (AC), (AB)$ ale triunghiului ABC se consideră respectiv punctele D, E, F astfel încât $(AD, (BE, (CF$ sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului, care se intersectează în punctul I. Demonstraţi că:

a) $\dfrac{ID}{AD} + \dfrac{IE}{BE} + \dfrac{IF}{CF} = 1$;

b) $\dfrac{AI}{AD}+\dfrac{BI}{BE}+\dfrac{CI}{CF}=2$;

c) $\dfrac{IA}{ID}+\dfrac{IB}{IE}+\dfrac{IC}{IF}\geqslant 6$.

d) Arătaţi că triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă

$$\max\left\{\frac{ID}{AD},\frac{IE}{BE},\frac{IF}{CF}\right\}=\frac{1}{3}.$$

3. Fie ABC un triunghi neisoscel şi D,E,F picioarele bisectoarelor exterioare ale unghiurilor triunghiului. Demontraţi că punctele D,E,F sunt coliniare.

4. Populaţia globului, notată cu $P(n)$, unde n reprezintă anul estimării, era în anul 1990 de aproximativ 5,28 miliarede de locuitori, iar în anul 2000 ajunsese la 6,05 miliarde de locuitori. Presupunând că există numerele reale a şi b astfel încât $P(n)=an+b$, pentru orice $n\geqslant 1000$, calculaţi numărul estimativ al oamenilor de pe Terra în anul 2025.

5. Considerăm funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\min\{4-x,2x+1\}$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}x-3 & ,x<3\\ 6-2x & ,x\geqslant 3\end{cases}$.

a) Reprezentaţi grafic funcţiile f şi g.

b) Calculaţi $f\circ g$ şi $g\circ f$.

6. Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$.

a) Determinaţi numerele întregi a pentru care $\dfrac{f(a)}{a-2}<0$.

b) Arătaţi că există $b\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f(x+1)-f(x-1)=b$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Clasa a X-a

1. Fie ε o soluţie a ecuaţiei $x^2+x+1=0$.

a) Calculaţi $\varepsilon^n+\dfrac{1}{\varepsilon^n}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Rezolvaţi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z=2\\ x+\varepsilon^2 y+\varepsilon z=3\end{cases}$.

2. Fie triunghiul ABC, având afixele vârfurilor a,b,c. Arătaţi că triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă este îndeplinită oricare dintre condiţiile:

a) $a+\varepsilon b+\varepsilon^2 c=0$, unde $\varepsilon\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\varepsilon^3=1$.

b) $a-b+\varepsilon(b-c)+\varepsilon^2(c-a)=0$, unde $\varepsilon\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\varepsilon^3=1$.

3. Determinaţi afixul celui de-al treilea vârf al unui triunghi echilateral, ştiind că afixele a două vârfuri sunt $a=1+\mathrm{i}$ şi $b=-1-\mathrm{i}$.

4. a) Dacă punctele A, B, C, D au afixele a, b, c, d, demonstraţi că $AB \perp CD \iff \dfrac{a-b}{c-d} \in i\mathbb{R}^*$.

b) Ce puncte din plan au afixe care verifică egalitatea $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z-3}{z-1}\right) = 0$?

5. a) Demonstraţi că punctele distincte A, B, C având afixele a, b, respectiv c sunt coliniare dacă şi numai dacă $\dfrac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}^*$.

b) Arătaţi că imaginile geometrice ale numerelor $a = 1 - \mathrm{i}$, $b = -1 + 5\mathrm{i}$, $c = 2\mathrm{i}$ sunt puncte coliniare.

6. Pe laturile patrulaterului $ABCD$ se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABM, BCN, CDP, DAQ. Arătaţi că patrulaterele $ABCD$ şi $MNPQ$ au acelaşi centru de greutate.