Clasa a IX-a

13. Determinaţi numerele întregi a, b, c, d pentru care $\begin{cases} ab - 2cd = 3 \\ ac + bd = 1 \end{cases}$.

[1] La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii. (N.R.)

14. a) Arătaţi că, dacă n este un număr întreg nedivizibil cu 3, atunci n^2-1 este un număr natural divizibil cu 3.

b) Determinaţi numerele întregi n pentru care $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ este număr prim.

15. Fie a, b, c, $d \in (0, \infty)$ astfel încât $abcd = 1$. Arătaţi că:

a) $\frac{1+ab}{1+a} = \frac{1+cd}{cd+acd}$; b) $\frac{1}{1+a+ab+abc} = \frac{d}{1+d+ad+abd}$;

c) $\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+cd}{1+c} + \frac{1+da}{1+d} \geq 4$.

16. Fie AB şi CD două segmente. Arătaţi că dreptele suport AB şi CD sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2$.

17. Arătaţi că unghiul format o coardă a unui cerc şi tangenta la un cerc într-un capăt al coardei este egal cu orice unghi înscris în cerc care subîntinde acea coardă.

18. a) Fie AB şi CD două segmente care au exact un punct comun, notat X, diferit de capete. Arătaţi că patrulaterul $ACBD$ este inscriptibil dacă şi numai dacă $AX \cdot XB = CX \cdot XD$.

b) Fie AB şi CD două segmente pentru care dreptele suport se intersectează în X, astfel încât C este între X şi D şi A este între X şi B. Arătaţi că patrulaterul $ABDC$ este inscriptibil dacă şi numai dacă $XA \cdot XB = XC \cdot XD$.

Clasa a X-a

19. Arătaţi că, dacă $a, b \in (0, +\infty)$ şi $1 + \log_8 a + \log_8 b = \log_8(9a^2 - b^2)$, atunci $a = b$.

20. Determinaţi mulţimea valorilor lui x pentru care este definit $\lg \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+x}}$.

21. Fie $x > 0$. Arătaţi că numărul $n = \log_2^3 \frac{2}{x} + \log_2^3 2x + \log_2 x^3 \cdot \log_2 \frac{1}{x^2}$ este natural.

22. Se consideră numerele $a = \log_{45} 75$ şi $b = \log_{135} 375$.

a) Exprimaţi numerele a şi b în funcţie de $\log_3 5$.

b) Exprimaţi a în funcţie de b.

23. Rezolvaţi ecuaţia $2x^2 + 2^{\log_2 x} = 9^{\log_3 \sqrt{10}}$.

24. Se consideră numerele $a, b, c \in (1, +\infty)$. Arătaţi că au loc inegalităţile:

a) $\log_a(b^{\log_a b}) + \log_b(c^{\log_b c}) + \log_c(a^{\log_c a}) \geq \log_b a + \log_c b + \log_a c$;

b) $\frac{\log_a b}{a+b} + \frac{\log_b c}{b+c} + \frac{\log_c a}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$;

c) $\log_{a^2 b} a + \log_{b^2 c} b + \log_{c^2 a} c \leq 1$.