DIN NOU DESPRE PROBLEMA 28003 DIN G.M.-B 2/2021

Titu Zvonaru[1)]

Problema 28003, propusă de Marius Stănean, are următorul enunț.

Numerele reale pozitive a, b, c verifică relația $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Arătați că

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{15abc}{4}\geqslant\frac{27}{4}.$$

O soluție este prezentată în GM-B 9/2021, iar în [1] se demonstrează că inegalitatea

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+kabc\geqslant k+3 \tag{1}$$

este adevărată pentru orice $k\leqslant\frac{9+2\sqrt{14}}{3}$. Rămâne deschisă problema de a a găsi cel mai mare k pentru care inegalitatea (1) este adevărată. Deoarece cu inegalitatea mediilor obținem ușor că $abc\leqslant 1$, rezultă că dacă inegalitatea (1) este adevărată pentru $k=\alpha$, atunci este adevărată pentru orice $k\leqslant\alpha$.

Vom demonstra inegalitatea

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{22abc}{3}\geqslant\frac{31}{3} \tag{2}$$

Se știe că, dacă numerele a, b, c verifică relația $a^2+b^2+c^2+abc=4$ și sunt pozitive, atunci există un triunghi ascuțitunghic MNP astfel încât $a=2\cos M$, $b=2\cos N$, $c=2\cos P$. Atunci $90^\circ-\frac{M}{2}$, $90^\circ-\frac{N}{2}$, $90^\circ-\frac{P}{2}$ sunt unghiurile unui triunghi ascuțitunghic, ceea ce înseamnă că putem considera

[1)]Profesor, Comănești.

un triunghi de laturi u, v, w și semiperimetru p, pentru care $a = 2\sin\frac{U}{2}, b = 2\sin\frac{V}{2}, c = 2\sin\frac{W}{2}$. Cu substituțiile $u = y+z$, $v = z+x$, $w = x+y$ obținem

$$a = 2\sqrt{\frac{(p-v)(p-w)}{vw}} = 2\sqrt{\frac{yz}{(z+x)(y+x)}}\ .$$

Rezultă că pentru decondiționare putem folosi substituțiile

$$a = 2\sqrt{\frac{yz}{(y+x)(z+x)}},\ b = 2\sqrt{\frac{zx}{(z+y)(x+y)}},\ c = 2\sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}}.$$

Inegalitatea (2) devine

$$\frac{y(y+z)}{x(x+z)} + \frac{z(z+x)}{y(y+x)} + \frac{x(x+y)}{z(z+y)} + \frac{176xyz}{3(x+y)(y+z)(z+x)} \geqslant \frac{31}{3},$$

și, după eliminarea numitorilor

$$\begin{aligned} 3(x^5y + y^5z + xz^5) + 6(x^4y^2 + y^4z^2 + x^2z^4) + 3(x^4yz + xy^4z + xyz^4 \\ +x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3) + 114x^2y^2z^2 \\ \geqslant 25(x^3y^2z + xy^3z^2 + x^2yz^3) + 28(x^3yz^2 + x^2y^3z + xy^2z^3). \end{aligned} \qquad (3)$$

Inegalitatea (3) este ciclică. Putem presupune că $x = \min\{x, y, z\}$ și avem de analizat cazurile $x \leqslant y \leqslant z$ și $x \leqslant z \leqslant y$.

Dacă $x \leqslant y \leqslant z$, considerăm numerele pozitive p, q astfel încât $y = x+p, z = x+p+q$. După calcule, inegalitatea (3) devine

$$\begin{aligned} 10x^4p^2 + 10x^4pq + 10x^4q^2 + 21x^3p^3 - 9x^3p^2q + 8x^3pq^2 + 19x^3q^3 + 27x^2p^4- \\ -27x^2p^3q - 18x^2p^2q^2 + 36x^2pq^3 + 24x^2q^4 + 28xp^5 + 16xp^4q - xp^3q^2+ \\ +23xp^2q^3 + 18xpq^4 + 3xq^5 + 12p^6 + 24p^5q + 15p^4q^2 + 3p^3q^3 \geqslant 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Inegalitatea (4) este adevărată deoarece

$$5x^3p^3 + 5x^3pq^2 \geqslant 10x^3p^2q \geqslant 9x^3p^2q,$$
$$10x^4p^2 + 10p^4q^2 + 4x^4pq + 4p^5q \geqslant 20x^2p^3q + 8x^2p^3q \geqslant 27x^2p^3q,$$
$$5x^4q^2 + 5p^4q^2 + 4xpq^4 + 4x^3p^3 \geqslant 10x^2p^2q^2 + 8x^2p^2q^2 = 18x^2p^2q^2,$$
$$xp^4q + xp^2q^3 \geqslant 2xp^3q^2 \geqslant xp^3q^2.$$

Dacă $x \leqslant z \leqslant y$, vom considera numerele pozitive p, q astfel încât $z = x+p$, $y = x+p+q$ și, în urma calculelor, inegalitatea este evidentă în acest caz.

Pentru $a = 0{,}93046$, $b = 0{,}76$, $c = 1{,}284$ și $k = 8{,}2$ inegalitatea (1) nu este adevărată. Deducem că cel mai mare k pentru care inegalitatea (1) este adevărată trebuie căutat în intervalul $\left[\frac{22}{3}, \frac{41}{5}\right)$.

Bibliografie

[1] M. Cucoaneș, *Asupra problemei* 28003 *din Gazeta Matematică*, GM-B 2/2022.

[2] $* * *$ https://www.wolframalpha.com/