Clasa a IX-a

13. Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (m-1)\,x^2 - (2m+1)\,x + 1 = 0\right\} \cap \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) = \emptyset.$$

14. Fie m un număr real şi x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei:

$$x^2 - \left(2m^2+1\right)x + m^4 = 0.$$

a) Arătaţi că x_1, x_2 sunt numere reale pozitive şi distincte.
b) Arătaţi că $(x_1 + x_2 - 1)^2 = 4x_1x_2$.
c) Calculaţi $\left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right|$.
d) Arătaţi că, dacă $x_1 < x_2$, în intervalul (x_1, x_2) se găseşte cel mult un pătrat perfect.

15. Fie mulţimile:

$$A = \left\{a \in \mathbb{Z} \mid \exists x \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } x^2 + 2\,(2a+1)\,x + 3a\,(a+1) = 0\right\},$$

$$B = \left\{b \in \mathbb{Z} \mid \exists x \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } 2bx^2 + (8b-3)\,x + 6b - 6 = 0\right\}.$$

Câte triunghiuri au toate vârfurile în punctele mulţimii $A \times B$?

16. Stabiliţi dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f\,(x) = \sin(4x) + \cos\left(\sqrt{2}x\right)$ este periodică.

17. Stabiliţi dacă există un triunghi ABC în care are loc relaţia de mai jos şi, în caz afirmativ, stabiliţi natura acestuia:
a) $\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C = \mathrm{ctg}A + \mathrm{ctg}B + \mathrm{ctg}C$;
b) $\mathrm{tg}\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{b+c}$.

18. Considerăm, în plan, punctele $A(-1, 3)$ şi $B(4, 5)$. Determinaţi coordonatele punctului $M \in Ox$ astfel încât $AM + MB$ să fie minimă.

Clasa a X-a

19. Se consideră în plan 10 puncte distincte care determină exact 43 de drepte diferite. Câte dintre cele 10 puncte sunt coliniare?

20. Câte soluţii are, în mulţimea numerelor întregi, inecuaţia $|x| + |y| < 12$?

21. a) Scrieţi numărul complex $z = 1 + i$ sub formă trigonometrică şi apoi calculaţi z^n cu formula lui Moivre;

b) Dezvoltaţi $(1+i)^n$ cu formula binomului lui Newton.

c) Deduceţi că:

i) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$;

ii) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

22. Fie

$$S_1 = C_n^0 + 2C_n^2 + 2^2 C_n^4 + 2^3 C_n^6 + \ldots,$$

$$S_2 = C_n^1 + 2C_n^3 + 2^2 C_n^5 + 2^3 C_n^7 + \ldots.$$

Arătaţi că $S_1^2 - 2S_2^2 = (-1)^n$.

23. Scrieţi ecuaţia dreptei d, ştiind că punctul $M(2,-1)$ este piciorul perpendicularei din O pe d, unde O este originea reperului cartezian xOy.

24. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta $d: 4x + 3y - 12 = 0$.

a) Determinaţi coordonatele punctelor A şi B de intersecţie a dreptei d cu axa Ox, respectiv Oy.

b) Dacă (AB) este o latură a unui trapez dreptunghic $ABCD$ cu unghiul $\sphericalangle A$ drept şi $BC \parallel AD$, având toate vârfurile pe axele de coordonate, determinaţi coordonatele punctelor C şi D.

c) Scrieţi ecuaţiile dreptelor BC şi CD.