PENTRU CERCURILE DE ELEVI

PORNIND DE LA O PROBLEMĂ DE CONCURS

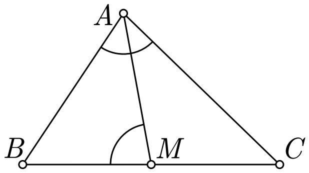
Traian Preda[1)]

În lecţia ce urmează vom rezolva, într-un context mai general, o problemă dată la O.N.M.2010, clasa a 6-a. Considerăm că ideile prezentate ilustrează tehnici utile în rezolvarea unor probleme diverse.

Problemă. (Mircea Lascu, Marius Stănean) *În triunghiul ABC, M este mijlocul segmentului BC. Dacă $\sphericalangle AMB = 45^\circ$ şi $\sphericalangle ACB = 15^\circ$, determinaţi $\sphericalangle BAC$.*

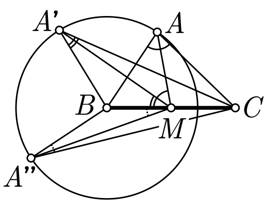
Propoziţia 1. Considerăm triunghiul ABC în care AM este mediană şi $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle AMB$. Atunci are loc relaţia $BC = AB\sqrt{2}$.

[1)]Profesor, Colegiul Naţional „Grigore Moisil”,Bucureşti.



Demonstraţie. Din $\triangle ABC \sim \triangle MBA$ (U.U) reiese $\dfrac{AB}{MB} = \dfrac{BC}{AB}$, deci $AB^2 = BC \cdot MB$, sau $2AB^2 = BC^2$, de unde $BC = AB\sqrt{2}$.

Propoziţia 2. Fie segmentul BC fixat într-un plan α şi M mijlocul segmentului BC. Locul geometric al punctelor A din planul α cu proprietatea că $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle AMB$ este cercul de centru B şi rază $\dfrac{BC}{\sqrt{2}}$, din care scoatem punctele de intersecţie a cercului cu dreapta BC.



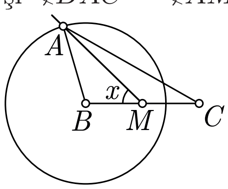
Demonstraţie. Dacă $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle AMB$, atunci, din propoziţia 1, rezultă că A se află pe cercul de centru B şi rază $BC/\sqrt{2}$ şi nu aparţine dreptei BC.

Reciproc, dacă A se află pe cercul de centru B şi rază $BC/\sqrt{2}$ şi nu aparţine dreptei BC, atunci „răsturnând" raţionamentul din demonstrarea propoziţiei 1, obţinem sucesiv

$$BC^2 = 2AB^2,\ AB^2 = BC \cdot MB,\ \frac{AB}{MB} = \frac{BC}{AB},$$

$$\triangle ABC \sim \triangle MBA,\ \text{(L.U.L)},\ \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle AMB.$$

Propoziţia 3. Considerăm numerele $\ell > 0$ şi $x \in (0, 180)$. Atunci există şi este unic determinat triunghiul ABC care are proprietăţile $BC = \ell$ şi $\sphericalangle BAC = \sphericalangle AMB = x^\circ$, unde M este mijlocul laturii BC.



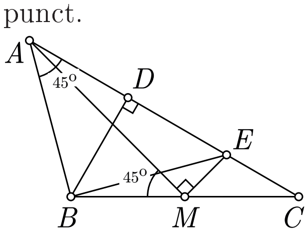
Demonstraţie. Construim $BC = \ell$ şi punctul M. Atunci punctul A este unic determinat ca intersecţia cercului $\mathcal{C}(B; BC/\sqrt{2})$ cu semidreapta $[MX$, construită într-unul dintre semiplanele determinate de BC, astfel încât $\sphericalangle BMX = x^\circ$.

Propoziţia 4. Fie triunghiul ABC în care AM este mediană.

a) Dacă $\sphericalangle BAC = \sphericalangle AMB = 45^\circ$, atunci măsurile celorlalte unghiuri ale triunghiului ABC sunt $\sphericalangle B = 105^\circ$, $\sphericalangle C = 30^\circ$.

b) Dacă $\sphericalangle BAC = \sphericalangle AMB = 135^\circ$, atunci măsurile celorlalte unghiuri ale triunghiului ABC sunt $\sphericalangle B = 15^\circ$, $\sphericalangle C = 30^\circ$.

Demonstraţie. Vom prezenta câte două rezolvări pentru fiecare subpunct.

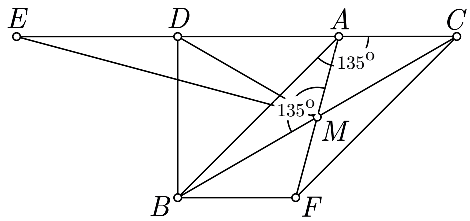


a) *Prima soluţie.* Ducem $BD \perp AC$, $D \in [AC]$. Atunci $\triangle ADB$ este dreptunghic isoscel, deci $AB = BD\sqrt{2}$. Din propoziţia 1 avem $BC = AB\sqrt{2}$, ceea ce duce la $BC = 2BD$, de unde $\sphericalangle C = 30^\circ$ (teorema unghiului de 30° în triunghiul dreptunghic BDC).

A doua soluţie. Ducem $BD \perp AC$, $D \in AC$ şi $EM \perp AM$, $E \in AC$.

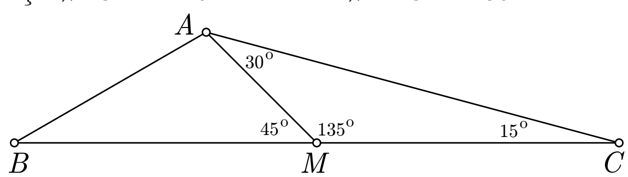
Atunci $\sphericalangle BAE + \sphericalangle BME = 45^\circ + 135^\circ$, deci $ABME$ este patrulater inscriptibil. Reiese $\sphericalangle ABE = 90°$, deci triunghiul ABE este dreptunghic isoscel, ceea ce arată că D este mijlocul segmentului AE. Din triunghiul dreptunghic MDE rezultă $MD \equiv AD \equiv DE$. Cum $BD \equiv AD$, reiese că $\triangle BDM$ este echilateral, deci $\sphericalangle ABC = 60° + 45° = 105°$.

b) *Prima soluţie.* Efectuăm aceleaşi construcţii ca la soluţiile de la punctul a) ($BD \perp AC$, $ME \perp AM$, $D, E \in AC$) şi repetăm *mutatis mutandis* raţionamentul de la a) (cu modificarea că $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BME = 45°$).



A doua soluţie. Construim simetricul F al punctului A faţă de M. Atunci $ABFC$ este paralelogram, deci $\sphericalangle ACF = \sphericalangle AMC = 45°$. Rezultă, conform a), că $\sphericalangle MAC = 105°$ şi $\sphericalangle MFC = 30°$, de unde $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABM - \sphericalangle MAC = 30°$. $\square$

Propoziţia 5. Considerăm triunghiul ABC în care AM este mediană, $\sphericalangle AMB = 45°$ şi $\sphericalangle ACB = 15°$. Atunci $\sphericalangle BAC = 135°$.



Demonstraţie. Din ipoteză $\sphericalangle ACM = 15°$ şi $\sphericalangle CAM = 30°$, deci unghiurile triunghiului CAM sunt unic determinate. Astfel, pornind de la $\triangle ACM$ şi luând B simetricul lui C faţă de M, $\triangle ABC$ este unic determinat din punct de vedere al unghiurilor, deoarece orice două triunghiuri care se obţin prin această construcţie sunt asemenea. Pe de altă parte, conform propoziţiei 4, dacă $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BAC = 135°$, atunci $\sphericalangle ACB = 15°$, iar $\sphericalangle AMC = 135°$. Astfel, triunghiul construit conform ipotezei este asemenea cu un triunghi în care $\sphericalangle BAC = 135°$, deci triunghiul din problemă are $\sphericalangle BAC = 135°$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Bogoşel, B., Fulger, S., Lascu, M., Stănean, M., *Probleme de geometrie. Calculul măsurii unor unghiuri*, Editura Gil, Zalău (2016).

[2] Lascu, M., Preda, T., *Zece soluţii ale unei probleme de concurs*, Revista de Matematică din Timişoara, Nr. 4/2018.