Clasa a IX-a

13. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0,1)$ astfel încât $[x+a_1]+[x+a_2]+\ldots+[x+a_n] = [x+2-\sqrt{2}]+[x+3-\sqrt{5}]+[x+4-\sqrt{10}]$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătaţi că $n = 3$.

b) Arătaţi că $\{a_1, a_2, a_3\} = \left\{2-\sqrt{2}, 3-\sqrt{5}, 4-\sqrt{10}\right\}$.

14. Demonstraţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n > 0$ cu proprietatea că $x_1 \cdot x_2 \cdot \ \ldots \cdot x_n = 1$, rezultă că $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n$.

15. Studiaţi monotonia funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în fiecare dintre cazurile:

a) $f(x) = (3m+2)\,x + 2,\ m \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) = (2\sqrt{ab} - a - b)x + 1,\ a,\ b \in (0,\ \infty)$;

c) $f(x) = (\sqrt{2} - \sin a - \cos a)x + 2,\ a \in \mathbb{R}$.

16. a) Arătaţi că, dacă M este un punct oarecare din planul triunghiului ABC cu centrul de greutate G, atunci $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} = 3 \cdot \overrightarrow{MG}$.

b) Arătaţi că, dacă M este un punct oarecare din planul triunghiului ABC şi G este centrul de greutate al triunghiului, atunci $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

c) Arătaţi că, dacă M este un punct oarecare din planul triunghiului ABC, atunci $MA^2 + MB^2 + MC^2 \geqslant GA^2 + GB^2 + GC^2$.

17. Demonstraţi că:

a) în orice triunghi ABC avem $l_a = \dfrac{2bc}{b+c} \cos \dfrac{A}{2}$, unde l_a este lungimea bisectoarei unghiului A.

b) Dacă un triunghi are două bisectoare congruente, atunci triunghiul este isoscel.

18. Arătaţi că, dacă $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\sin^n x + \cos^n x = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci $n = 2$.

Clasa a X-a

19. Fie $x > 0$. În dezvoltarea binomului $\left(\sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{23}$, determinaţi:

a) termenul care conţine x^6;

b) termenii în care exponentul lui x este număr întreg;

c) numerele reale x pentru care $T_9 = T_{15}$.

20. Determinaţi exponentul lui 2 în descompunerea în factori primi a numărului A_{2n}^n.

21. Câte numere naturale de 8 cifre verifică simultan condiţiile: conţin câte o dată cifrele 1,2,3; conţin de două ori cifra 4; restul de trei cifre sunt mai mari ca 4?

22. În câte moduri pot fi repartizaţi 25 de elevi în trei grupe de câte 7, 8 şi respectiv 10 elevi?

23. Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $\arcsin x + \arcsin(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$.

b) $\operatorname{arctg} \dfrac{x}{x+1} - \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2x+1} = \dfrac{\pi}{4}$.

24. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul

$$\begin{cases} \lg^2 x + \lg^2 y = \dfrac{5}{2}\left(\lg a^2\right)^2 \\ xy = a^4. \end{cases}$$