ASUPRA UNEI CLASE DE FUNCŢII

Sergiu Novac[1)]

Punctul de plecare al acestei lecţii este problema 4, clasa a 12-a, de la etapa judeţeană a Olimpiadei Naţionale de Matematică 1989. Clasa de funcţii care ne interesează este tocmai cea descrisă în ipoteză.

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *cu proprietatea că* f *are limită reală în orice punct din intervalul* $[a, b]$. *Demonstraţi că* f *e integrabilă.*

[1)]Student , Oxford.

Folosind cunoştinţe dincolo de materia de liceu, următoarea teoremă, împreuna cu criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann rezolvă imediat problema.

Teoremă. *O funcţie ce are limite laterale reale în orice punct din domeniul de definiţie este continuă peste tot, cu excepţia unei mulţimi numărabile.*

Să observăm că ipoteza problemei 4 este mai tare decât cea a teoremei, căci existenţa limitelor laterale într-un punct nu implică existenţa limitei în punctul respectiv.

Cu toate acestea, cele două rezultate nu sunt tocmai potrivite pentru a fi citate în cadrul olimpiadei, demonstraţia teoremei nefiind „elementară". Putem, totuşi, da o demonstraţie relativ elementară a teoremei, atunci când ne aflăm în ipoteza întărită a problemei. Cu alte cuvinte, vom demonstra următorul rezultat.

Propoziţie. *O funcţie ce are limită finită în orice punct al domeniului de definiţie este continuă peste tot, cu excepţia unei mulţimi numărabile de puncte.*

În [1] se prezintă o rezolvare directă a problemei, folosind definiţia integralei Riemann, însă se demonstrează şi următoarea Lemă ce ne va fi utilă în demonstrarea rezultatului propus. Vom lucra cu funcţii definite pe $\mathbb{R}$, rezultatele putând fi restrânse la funcţii definite pe intervale proprii.

Lema 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu limită finită în orice punct şi funcţia g definită prin

$$g(x) = \lim_{y \to x} f(y).$$

Atunci, g este continuă pe $\mathbb{R}$.

Demonstraţie. Fie $x \in \mathbb{R}$ şi $\varepsilon > 0$ fixate. Deoarece $\lim\limits_{y \to x} f(y) = g(x)$, deducem că există $\delta > 0$ astfel încât $|g(x) - f(y)| < \dfrac{1}{2}\varepsilon$, pentru orice y cu $0 < |x - y| < \delta$. Vom demonstra că $|g(x) - g(z)| < \varepsilon$, $\forall |x - z| < \delta$. Fie $z \in (x - \delta, x + \delta)$. Folosind din nou că $g(z) = \lim\limits_{y \to z} f(y)$, deducem că există δ' a.i $|g(z) - f(y)| < \dfrac{1}{2}\varepsilon$, pentru orice y cu $0 < |z - y| < \delta'$. Alegem atunci $y_0 \in (x - \delta, x + \delta) \cap (z - \delta', z + \delta')$ şi avem că $(g(x) - g(z) \leq |g(x) - f(y_0)| + |g(z) - f(y_0)| < \varepsilon$. Aceasta ne arată că

$$\lim_{y \to x} g(y) = g(x).$$

Cum x a fost ales arbitrar, deducem că g e continuă pe $\mathbb{R}$. □

Înainte de a prezenta demonstraţia propusă, să mai demonstrăm următorul rezultat.

Lema 2. Fie M o submulţime nenumărabilă a lui $\mathbb{R}$. Atunci M are un punct de acumulare real.

Demonstraţie. Avem $\mathbb{R} = \bigcup_{a\in\mathbb{Z}}[a, a+1]$. Mulţimea M fiind nenumărabilă, cel puţin una din mulţimile $M \cap [a, a+1]$ este nenumărabilă căci, în caz contrar, din faptul că $M = \bigcup_{a\in\mathbb{Z}}([a, a+1] \cap M)$, ar rezulta că M e numărabilă.

În particular, găsim $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $[a, a+1]$ conţine o infinitate de elemente ale lui M. Atunci, există un punct de acumulare al lui M in $[a, a+1]$. □

Putem acum demonstra rezultatul propus. Vom nota, în general, D_u mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţiei u.

Fie f o funcţie cu limită finită în orice punct real şi g definită prin

$$g(x) = \lim_{y\to\ x} f(y).$$

Considerăm şi $h = f - g$. Din definiţia lui g, h are limita 0 în orice punct. Funcţia g fiind continuă avem $D_f = D_h$.

Vrem să demonstrăm că D_h e numărabilă. Avem $D_h = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \neq 0\}$, sau, echivalent,

$$D_h = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \tag{1}$$

unde $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid |h(x)| > \dfrac{1}{n}\}$. Vom demonstra că A_n e numărabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă ar exista un n astfel încât A_n să fie nenumărabilă, folosind Lema 2, deducem că există un şir $(a_m) \subset A_n$ care converge la un punct $a \in \mathbb{R}$. Dar atunci

$$0 = \lim_{x\to a} |h(x)| = \lim_{m\to\infty} |h(a_m)| \geq \frac{1}{n},$$

întrucât $a_m \in A_n$ $\forall m \in \mathbb{N}$. Aceasta este clar o contradicţie, deci A_n e numărabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Din (1) reiese că D_h e numărabilă, fiind o reuniune numărabilă de mulţimi numărabile, ceea ce conduce la concluzia că D_f e numărabilă. □

Conchidem prin a enumera proprietăţile clasei de funcţii discutate. Aşadar, dacă f este o funcţie cu limită reală în orice punct, atunci:

(1) f este integrabilă pe orice interval mărginit din domeniul de definţie
(2) funcţia g dată de $g(x) =$ limita lui f în x este continuă
(3) f este continuă peste tot, cu excepţia, eventual, a unei mulţime numărabile de puncte.

Observaţii.

(1) Funcţia h imită variaţia lui f. Puteam evita introducerea funcţiilor g şi h lucrând direct cu variaţia lui f, însă am considerat continuitatea lui g un rezultat notabil, ce merită prezentat.
(2) În cazul unei funcţii f definite pe un interval I mărginit, a doua lemă nu mai este necesară. Mulţimile A_n fiind incluse în I, trebuie

să fie chiar finite, altfel au un punct de acumulare real, din nou din Weierstrass.

Bibliografie

[1] D.M. Bătineţu-Giurgiu, I.V. Maftei, V. Gheorghiţă, I. Tomescu, Florica Vornicescu, *Probleme date la olimpiadele de matematică pentru licee,* 1950 – 1990, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1992.