ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

CÂTEVA OBSERVAŢII PE MARGINEA INEGALITĂŢII ERDŐS-MORDELL

Dumitru Mihalache[1)]

Abstract. This article presents some classical facts about the topic in the title and two extensions, as well as an interesting IMO problem which can be connected to the subject

Keywords: Erdős-Mordell inequality,

MSC: 51M04

1. Inegalităţi clasice de tip Erdős-Mordell. Inegalitatea menţionată în titlu – punctul (c) din enunţul de mai jos – a fost propusă de către Paul Erdős în 1935 ca problemă deschisă [4] (se pare că el a ajuns la acest rezultat pe cale empirică) în *The American Mathematical Monthly* şi a fost demonstrată abia doi ani mai tîrziu de către L. J. Mordell şi de către D. F. Barrow în aceeeaşi revistă [5] (numele celui de-al doilea rezolvitor a fost reţinut în legătură cu o întărire a inegalităţii originale). Nenumărate alte soluţii, generalizări şi aprofundări ale temei au urmat şi, pesemne, vor mai urma; noi aici intenţionăm să prezentăm la rând câteva inegalităţi care fac parte din aceeaşi familie cu inegalitatea Erdős-Mordell, ultima dintre ele mai puţin cunoscută (noi nu am întâlnit-o în literatură). Am pornit de la problema 71 de la pagina 393 din [3] şi de la problema 67 din [6] pe care le-am pus laolaltă în următorul enunţ:

Propoziţia 1. *Fie ABC un triunghi cu lungimile laturilor $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ şi aria S. Fie M un punct în interiorul sau pe laturile sale şi fie $R_a = MA$, $R_b = MB$, $R_c = MC$ distanţele sale la vârfurile triunghiului, respectiv fie $d_a = d(M, BC)$, $d_b = d(M, AC)$, $d_c = d(M, AB)$ distanţele punctului M la laturile triunghiului. Atunci au loc inegalităţile*:

(a) $aR_a + bR_b + cR_c \geqslant 4S$;

[1)]Profesor, Colegiul Naţional „Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

(b) $R_a d_a + R_b d_b + R_c d_c \geqslant 2(d_a d_b + d_a d_c + d_b d_c)$;
(c) $R_a + R_b + R_c \geqslant 2(d_a + d_b + d_c)$;
(d) $R_a R_b R_c \geqslant (d_a + d_b)(d_a + d_c)(d_b + d_c) \geqslant 8 d_a d_b d_c$.

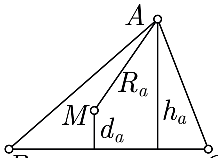


Figura 1

Demonstraţie. Avem, evident, $R_a + d_a \geqslant h_a$, $R_b + d_b \geqslant h_b$, $R_c + d_c \geqslant h_c$, unde cu h_a, h_b, h_c am notat lungimile înălţimilor triunghiului (din A, B, respectiv C). Egalitate în $R_a + d_a \geqslant h_a$ avem dacă şi numai dacă M aparţine înălţimii din A (figura 1). Rezultă

$$aR_a + ad_a \geqslant ah_a = 2S = ad_a + bd_b + cd_c,$$

deci $aR_a \geqslant bd_b + cd_c$ şi încă două inegalităţi similare.

Adunându-le pe toate trei (şi ţinând iar seama de $ad_a + bd_b + cd_c = 2S$) obţinem prima inegalitate (a).

Datorită observaţiei de mai sus, egalitatea la punctul (a) se realizează dacă şi numai dacă M se află pe fiecare înălţime a triunghiului, deci când el coincide cu ortocentrul acestuia (în particular, rezultă că inegalitatea este mereu strictă dacă triunghiul este obtuzunghic).

Pentru inegalitatea de la punctul (b), să rescriem $aR_a \geqslant bd_b + cd_c$ în forma

$$R_a d_a \geqslant \frac{b}{a} d_a d_b + \frac{c}{a} d_a d_c$$

şi să adunăm cu celelalte două inegalităţi analoage. Obţinem

$$R_a d_a + R_b d_b + R_c d_c \geqslant \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) d_a d_b + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) d_a d_c + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) d_b d_c \geqslant$$
$$\geqslant 2(d_a d_b + d_a d_c + d_b d_c),$$

utilizând şi inegalitatea binecunoscută $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$ (pentru $x, y > 0$).

Egalitatea se realizează în triunghiul echilateral, şi pentru M în centrul triunghiului, cum uşor se poate vedea.

Punctul (c) este inegalitatea Erdős-Mordell şi nu se mai poate demonstra pornind de la $R_a + d_a \geqslant h_a$; e nevoie de o abordare mai subtilă.

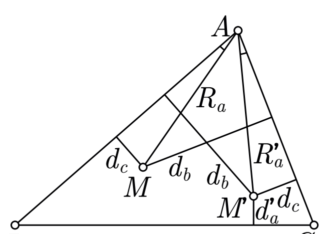


Figura 2

Anume, considerăm punctul M' - simetricul lui M faţă de bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ al triunghiului (figura 2) şi scriem şi pentru acesta inegalitatea $AM' + d(M', BC) \geqslant h_a$. Nu e greu de văzut că $AM' = R_a$ şi că distanţele lui M' la laturile AB şi AC ale triunghiului ABC sunt egale cu d_b, respectiv d_c. Dacă mai notăm cu d'_a distanţa de la M' la BC, avem deci $R_a + d'_a \geqslant h_a$, de unde

$$aR_a + ad'_a \geqslant ah_a = 2S = ad'_a + bd_c + cd_b \iff$$
$$\iff aR_a \geqslant bd_c + cd_b \iff R_a \geqslant \frac{b}{a} d_c + \frac{c}{a} d_b.$$

Adunăm cu cele două inegalităţi obţinute prin permutări circulare şi ajungem la celebra inegalitate Erdős-Mordell:

$$R_a + R_b + R_c \geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) d_a + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) d_b + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) d_c \geq$$
$$\geqslant 2(d_a + d_b + d_c)$$

(din nou prin intermediul inegalităţii $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$). Egalitatea se realizează dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral şi M este centrul său.

În fine, inegalitatea (d) este, cum spuneam, problema 67 din [6] şi primeşte acolo o soluţie trigonometrică; noi am observat că i se poate da o justificare pe baza celor de mai sus. Adunăm pentru asta $aR_a \geqslant bd_b + cd_c$ cu $aR_a \geqslant bd_c + cd_b$, împărţim prin a şi obţinem

$$2R_a \geqslant \frac{(b+c)(d_b+d_c)}{a};$$

desigur, se mai obţin două inegalităţi similare şi toate cele trei inegalităţi conduc (prin înmulţire membru cu membru) la

$$8R_aR_bR_c \geq \frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc}(d_a + d_b)(d_a + d_c)(d_b + d_c).$$

Cum $(x+y)(x+z)(y+z) \geqslant 8xyz$, pentru orice numere pozitive x, y, z, obţinem $8R_aR_bR_c \geq 8(d_a+d_b)(d_a+d_c)(d_b+d_c)$, ceea ce trebuia demonstrat.

Partea a doua rezultă din aceeaşi inegalitate cunoscută şi am adăugat-o acolo pentru că simţul estetic al autorului a fost mişcat de forma $R_aR_bR_c \geqslant 8d_ad_bd_c$ care decurge de aici (deşi, evident, aceasta este o inegalitate mai slabă decât cea din [6]). Egalitatea are loc tot în triunghiul echilateral, cu M fiind centrul său.

2. O inegalitate mai puţin cunoscută. Este limpede că un model se poate desluşi din toate aceste inegalităţi, iar pe baza modelului oricine se poate întreba dacă alte inegalităţi asemănătoare sunt valabile. Noi ne-am pus, de exemplu, problema dacă are loc întotdeauna inegalitatea

$$R_a^2 + R_b^2 + R_c^2 \geqslant 4(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2)$$

(sau dacă, eventual, are loc inegalitatea cu sens schimbat). Aceasta este inegalitatea despre care am spus că nu am întâlnit-o în literatură şi în legătură cu care am obţinut următorul rezultat.

Propoziţia 2. Fie ABC un triunghi echilateral şi M un punct oarecare în interiorul sau pe laturile sale. Avem atunci (cu notaţiile din propoziţia 1)

$$2(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 + d_ad_b + d_ad_c + d_bd_c) \leqslant R_a^2 + R_b^2 + R_c^2 \leqslant 4(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2).$$

Demonstraţie. Cititorul a observat probabil deja că, dacă $a = b = c = l$, inegalităţile folosite în demonstraţia primului punct al propoziţiei 1 devin $R_a \geq d_b + d_c$, $R_b \geqslant d_a + d_c$, $R_c \geqslant d_a + d_b$, deci că avem (uşor) $R_a^2 + R_b^2 + R_c^2 \geq (d_b + d_c)^2 + (d_a + d_c)^2 + (d_a + d_b)^2$, adică obţinem prima inegalitate dorită (cu egal tot când M este centrul triunghiului). De asemenea, se poate să fi văzut şi că pentru a doua inegalitate lucrurile nu mai sunt chiar atât de simple.

Fie atunci α măsura unghiului format de AM cu înălţimea din A a triunghiului (figura 3); datorită simetriei putem considera că $\alpha \in [0, \pi/6]$ şi că M este situat de aceeaşi parte a înălţimii ca punctul C. Atunci

$$d_b = R_a \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = R_a\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$$

şi

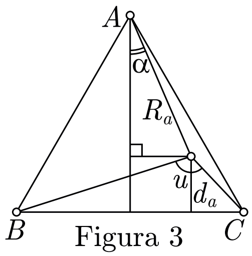


Figura 3

$$d_c = R_a \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = R_a\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right),$$

prin urmare

$$d_b^2 + d_c^2 = R_a^2\left(\frac{1}{2}\cos^2\alpha + \frac{3}{2}\sin^2\alpha\right).$$

Apoi $d_a + R_a\cos\alpha = l\sqrt{3}/2$ (înălţimea triunghiului), deci (calculăm!), până la urmă

$$4(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2) = 6R_a^2 + 3l^2 - 4lR_a\sqrt{3}\cos\alpha.$$

Acum

$$R_b^2 = \left(\frac{l}{2} + R_a\sin\alpha\right)^2 + d_a^2, \quad R_c^2 = \left(\frac{l}{2} - R_a\sin\alpha\right)^2 + d_a^2$$

de unde (iar calculăm) ajungem la

$$R_a^2 + R_b^2 + R_c^2 = 3R_a^2 + 2l^2 - 2lR_a\sqrt{3}\cos\alpha.$$

Astfel, inegalitatea de demonstrat devine

$$3R_a^2 - 2lR_a\sqrt{3}\cos\alpha + l^2 \geqslant 0 \iff (\sqrt{3}R_a - l)^2 + 2lR_a\sqrt{3}(1 - \cos\alpha) \geqslant 0,$$

formă în care este clară. Egalitatea se realizează dacă şi numai dacă $\sqrt{3}R_a = l$ şi $\cos\alpha = 1$ (deci $\alpha = 0$) adică pentru M în centrul triunghiului. E frumos şi instructiv că am putut exprima toate distanţele implicate în funcţie de numai una dintre ele şi un anumit unghi (şi e firesc să fie aşa câtă vreme aceste elemente determină poziţia punctului M).

Mai spectaculos este că (ne referim tot la cazul triunghiului echilateral), dacă ştim pe R_a, R_b şi R_c, atunci este bine determinată latura triunghiului. Mai precis avem (demonstraţi, sau vedeţi o soluţie în [2], problema 143 la paginile 110-111)

$$l^2 = \frac{1}{2}(R_a^2 + R_b^2 + R_c^2) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2R_a^2R_b^2 + 2R_a^2R_c^2 + 2R_b^2R_c^2 - R_a^4 - R_b^4 - R_c^4},$$

ceea ce duce (prin eliminarea radicalului) la

$$\sum R_a^4 - \sum R_a^2R_b^2 - l^2\sum R_a^2 + l^4 = 0$$

(sumele sunt ciclice).

Pe de altă parte, dacă scriem $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ pentru unghiul $u = \sphericalangle BMC$ avem

$$\left(\frac{R_b^2 + R_c^2 - l^2}{2R_bR_c}\right)^2 + \left(\frac{ld_a}{R_bR_c}\right)^2 = 1;$$

rearanjând găsim

$$R_b^4 + R_c^4 - 2R_b^2R_c^2 - 2l^2(R_b^2 + R_c^2) + 4l^2d_a^2 + l^4 = 0,$$

iar aceasta, adunată cu cele două obţinute prin permutări circulare conduce la

$$2\sum R_a^4 - 2\sum R_a^2R_b^2 - 4l^2\sum R_a^2 + 4l^2\sum d_a^2 + 3l^4 = 0.$$

În sfârşit, dacă de aici scădem identitatea de mai sus înmulţită cu 2, rămânem cu

$$4l^2\sum d_a^2 - 2l^2\sum R_a^2 + l^4 = 0 \iff 4\sum d_a^2 - 2\sum R_a^2 + l^2 = 0.$$

(Probabil se poate obţine şi altfel această identitate care leagă latura triunghiului echilateral de cele şase distanţe ale unui punct din interiorul său la vârfuri şi la laturi.) Dacă ne mai amintim şi că $d_a + d_b + d_c = l\sqrt{3}/2$ (o frumoasă proprietate a triunghiului echilateral) şi folosim iar o inegalitate binecunoscută găsim

$$\frac{3l^2}{4} = (d_a + d_b + d_c)^2 \leqslant 3(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2),$$

deci $l^2 \leqslant 4(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2)$. Atunci

$$0 = 4\sum d_a^2 - 2\sum R_a^2 + l^2 \leqslant 8\sum d_a^2 - 2\sum R_a^2$$

şi avem încă o demonstraţie pentru cea de-a doua inegalitate din propoziţia 2. Cititorul va şti sigur să o obţină şi pe prima, din identitatea de mai sus.$\square$

Să mai menţionăm în încheiere că inegalitatea $R_a^2 + R_b^2 + R_c^2 \leqslant 4(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2)$ nu poate fi declarată valabilă în orice triunghi: e suficient să alegem un triunghi isoscel şi pe M mijlocul bazei sale: se va vedea că, dacă raportul dintre lungimea laturilor egale şi lungimea bazei este suficient de mare (sau suficient de mic), atunci inegalitatea are loc cu sens schimbat. De asemenea, sugerăm cititorilor interesaţi să caute şi alte inegalităţi de acest tip - care să fie adevărate fără restricţii.

3. În loc de epilog. Aşa cum am spus, Barrow a demonstrat o inegalitate mai puternică decît cea originală propusă de Erdős, anume a arătat că

$$R_a + R_b + R_c \geqslant 2(l_a + l_b + l_c)$$

unde l_a, l_b, l_c sunt lungimile bisectoarelor interioare ale unghiurilor $\sphericalangle BMC$, $\sphericalangle CMA$ şi $\sphericalangle AMB$ din triunghiurile BMC, CMA şi respectiv AMB (figura 4).

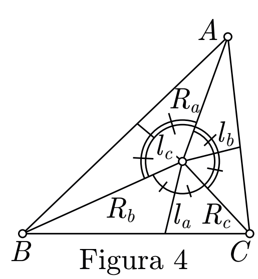
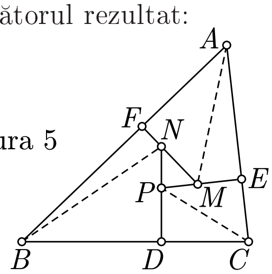


Figura 4

În cele ce urmează noi ne vom referi însă la o altă frumoasă generalizare a inegalităţii Erdős-Mordell (a se vedea [1]). Anume, este vorba despre următorul rezultat:

Figura 5



Propoziţia 3. Să presupunem că perpendicularele pe laturile BC, CA şi AB ale triunghiului ABC în punctele $D \in [BC]$, $E \in [CA]$, respectiv $F \in [AB]$ se intersectează două câte două în punctele M, N, P, aşa cum se vede în figura 5. Atunci are loc inegalitatea

$$AM + BN + CP \geqslant ND + PD + ME + PE + MF + NF.$$

Evident, dacă punctele M, N şi P coincid (adică dacă perpendicularele în D, E şi F pe laturile triunghiului sunt concurente), regăsim inegalitatea Erdős-Mordell.

Demonstraţia porneşte de la relaţia obţinută mai sus

$$R_a \geqslant \frac{b}{a}d_c + \frac{c}{a}d_b$$

(folosită pentru a justifica inegalitatea originală Erdős-Mordell), pe care acum o scriem

$$AM \geqslant \frac{b}{a}MF + \frac{c}{a}ME.$$

Analog avem

$$BN \geqslant \frac{c}{b}ND + \frac{a}{b}NF$$

şi

$$CP \geqslant\geq \frac{a}{c}PE + \frac{b}{c}PD.$$

Adunăm şi rearanjăm pentru a obţine

$$AM + BN + CP \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)(MF + NF) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)(ND + PD) + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)(PE + ME) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right)(MF - NF) + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b} - \frac{b}{c}\right)(ND - PD) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} - \frac{c}{a}\right)(PE - ME).$$

Inegalitatea dorită rezultă acum folosind iar $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$ $(x, y > 0)$, precum şi faptul că

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right)(MF - NF) + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b} - \frac{b}{c}\right)(ND - PD) + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} - \frac{c}{a}\right)(PE - ME) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right) MN + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b} - \frac{b}{c}\right) NP + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} - \frac{c}{a}\right) PM = 0,$$

ultima relaţie rezultând din asemănarea triunghiurilor MNP şi ABC (de unde puteţi observa că MN, NP, PM sunt direct proporţionale cu c, a, b respectiv; sau vedeţi [1]). □

Bijuteria matematică pe care intenţionăm s-o prezentăm în finalul acestei note este frumoasa demonstraţie dată (în concurs!) de către Ciprian Manolescu problemei a cincea, propusă de Armenia, la cea de-a treizeci şi şaptea Olimpiadă Internaţională de Matematică (Mumbai, India, 1996).[1)] Problema este următoarea:

Problema 5, OIM 1996. Fie $DGEHFI$ un hexagon convex cu laturile opuse paralele, adică în care $DG \parallel HF$, $GE \parallel FI$ şi $EH \parallel ID$. Dacă R_{XYZ} desemnează raza cercului circumscris triunghiului XYZ, să se arate că are loc inegalitatea

$$R_{DGE} + R_{EHF} + R_{FID} \geqslant \frac{1}{2}(DG + GE + EH + HF + FI + ID).$$

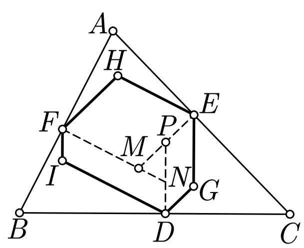


Figura 6

Soluţie. Paralela prin D la GE şi FI, paralela prin E la DG şi HF şi paralela prin F la EH şi ID se intersectează două câte două în punctele M, N, P (figura 6). Evident, se formează paralelogramele $DGEP$, $EHFM$ şi $FIDN$, din care rezultă că $DG = PE$ şi $GE = PD$, $EH = MF$ şi $HF = ME$, respectiv $FI = ND$ şi $ID = NF$.

Considerăm perpendicularele în D pe DN, în E pe EP şi în F pe FM care se intersectează două câte două în punctele A, B, C. Tot pentru că $DGEP$ este paralelogram rezultă că $R_{DGE} = R_{EPD}$, iar, deoarece patrulaterul $CEPD$ este inscriptibil cu unghiurile din E şi D drepte, rezultă că $R_{EPD} = R_{EPC}$, unde R_{EPC} este jumătate din ipotenuza CP a triunghiului EPC. Aşadar

$$R_{DGE} = \frac{1}{2}CP$$

[1)] Mulţumim domnului profesor Mihail Bălună pentru sugestia de a include aici această remarcabilă soluţie a tânărului Ciprian Manolescu (de altfel singurul cu punctaj maxim la acea Olimpiadă) – demonstraţie care (printre multe altele) îl anunţa încă de atunci pe redutabilul matematician de astăzi.

şi, similar
$$R_{EHF} = \frac{1}{2}AM, \quad R_{FID} = \frac{1}{2}BN,$$
ceea ce înseamnă că inegalitatea de demonstrat devine
$$\frac{1}{2}CP + \frac{1}{2}AM + \frac{1}{2}BN \geqslant \frac{1}{2}(PE + PD + MF + ME + ND + NF),$$
adică
$$AM + BN + CP \geqslant ND + PD + ME + PE + MF + NF,$$
cu alte cuvinte exact generalizarea inegalităţii Erdős-Mordell din propoziţia 3.

Bibliografie

[1] M. Becheanu, M. Bălună: *A XXXVII-a Olimpiadă Internaţională de Matematică, Gazeta Matematică, seria B*, 7-8/1996

[2] C. Cocea: *200 de probleme din geometria triunghiului echilateral*, Editura Gh. Asachi, Iaşi, 1992

[3] A. Engel: *Probleme de matematică – strategii de rezolvare*, Editura Gil, 2006

[4] P. Erdős: *Problem 3740, The American Mathematical Monthly*, 42(1935), p. 396

[5] L. J. Mordell, D. F. Barrow: *Solution of Problem 3740, The American Mathematical Monthly*, 44(1937), p. 252-254.

[6] M. Pimsner, S. Popa: *Probleme de geometrie elementară*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1979.