Clasa a IX-a

13. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația $\left|\left[\frac{x-1}{3}\right]\right| = \left\{\left|\frac{x+1}{2}\right|\right\}$.

14. a) Arătați că următoarea formulă de calcul propozițional este tautologie: $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.

b) Arătați că, pentru orice trei mulțimi A, B și C, avem $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

c) Arătați că, pentru orice trei mulțimi A, B și C, avem $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

15. a) Arătați că $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqslant 2$, oricare ar fi $a,\, b\in(0,\,\infty)$.

b) Arătați că $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geqslant 9$, oricare ar fi $a,\, b,\, c\in(0,\infty)$.

c) Arătați că, dacă α, β și γ sunt unghiurile pe care diagonala unui paralelipiped dreptunghic le formează cu trei muchii ale acestuia având un vârf comun, atunci $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\beta}+\dfrac{1}{\cos^2\gamma}\geqslant 9$.

16. În planul triunghiului ABC considerăm punctele M, N și P astfel încât $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{NC}$ și $\overrightarrow{CP}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{PA}$. Dacă E, F și G sunt mijloacele segmentelor MP, MN, respectiv NP, arătați că, pentru orice punct O din plan, avem $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG}$.

17. Pe latura AB și pe diagonala AC a paralelogramului $ABCD$ se iau punctele M și N astfel încât $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Arătați că punctele M, N și D sunt coliniare.

18. Fie P un punct în interiorul triunghiului echilateral de centru O. Dacă P_1, P_2 și P_3 sunt proiecțiile lui P pe laturile triunghiului, atunci $\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}+\overrightarrow{PP_3}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{PO}$.

Clasa a X-a

19. a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $4^x+(x-1)\cdot 2^x+2x=6$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_{x+\frac{1}{x}} 4 = x+\dfrac{1}{x}$.

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^{|x|}=\cos(x^2)$.

20. a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\left(3-2\sqrt{2}\right)^x+\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=34$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $(x-2)^{x^2-x}=(x-2)^{12}$.

21. Calculați partea reală a numărului $E=\dfrac{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}^2\cdot\ldots\cdot\mathrm{i}^{2014}}{\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\ldots+\mathrm{i}^{2014}}$.

22. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuațiile:

a) $4x^2+4x+5=0$;
b) $z^4+3z^2-4=0$.

23. Se notează cu a și b soluțiile ecuației $x^2+x+1=0$. Determinați modulul numărului complex $c=a^{2012}+b^{2012}$.

24. Determinați numerele reale a și b, știind că ecuația $x^2+ax+b=0$ admite soluția $x_1=1-2i$.