METODE DE CALCUL A UNEI LIMITE CU INTEGRALE

Gheorghe Alexe[1)] George-Florin Șerban[2)]

În anul 2001, la concursul național de titularizare a profesorilor de matematică a fost propusă urmatoarea problemă.

Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, calculați

$$\lim_{n\to\infty}\Big(n\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big).$$

Vom prezenta câteva metode de rezolvare a acestei probleme, care pot fi folosite pentru orice funcție integrabilă, cu derivata continuă. Așadar, vom aborda problema:

Dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcție de două ori derivabilă, cu derivata a doua mărginită, calculați

$$\lim_{n\to\infty}\Big(n\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big).$$

Metoda 1. (folosim formula trapezelor) Este bine cunoscut că, dacă $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ este o diviziune a intervalului $[a,b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}(x_{k+1}-x_k),$$

cu eroarea

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}(x_{k+1}-x_k)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}\sup|f''(x)|.$$

În cazul particular $[a,b]=[0,1]$ și $x_k=k/n$, $k=\overline{0,n}$ obținem

$$\Big|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{f(0)+f(1)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(k/n)}{2n}\Big|\leqslant\frac{M}{12n^2},$$

unde $M=\sup|f''(x)|$. Rezultă

$$\left|\Big(n\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big)-\frac{f(0)-f(1)}{2}\right|\leqslant\frac{M}{12n},$$

deci limita cerută este $\dfrac{f(0)-f(1)}{2}$.

[1)] Profesor, Liceul Pedagogic „D.P.Perpessicius“, Brăila.
[2)] Profesor, Liceul Pedagogic „D.P.Perpessicius“, Brăila,

Metoda 2. (folosim formula lui Taylor de aproximare pătratică) Fie $G : [0,1] \to \mathbb{R}$, $G(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Atunci $G'(x) = f(x)$, $G''(x) = f'(x)$ și

$$G(x) = G(x_0) + \frac{G'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{G''(t(x_0,x))}{2!}(x - x_0)^2,$$

cu $t(x_0,x)) \in (x_0,x)$.

Fie $x = \frac{k+1}{n}$, $x_0 = \frac{k}{n}$. Rezultă $G(\frac{k+1}{n}) = G(\frac{k}{n}) + \frac{1}{n}G'(\frac{k}{n}) + \frac{1}{2n^2}G''(t_k)$, $k = \overline{0,n-1}$. Adunând aceste relații obținem

$$G(1) - G(0) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} G''(t_k).$$

Deoarece $G(1) - G(0) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$,

$$n\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) + \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} G''(t_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) + \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f'(t_k).$$

Ultima parte – să o notăm S_n – este o sumă Riemann pentru funcția continuă $\frac{1}{2}f' : [0,1] \to \mathbb{R}$, diviziunea $(0, 1/n, 2/n, \ldots, n/n)$ și punctele intermediare $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, deci

$$S_n \to \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

Rezultă că limita cerută este $f(0) - f(1) + \dfrac{f(1) - f(0)}{2} = \dfrac{f(0) - f(1)}{2}$.

Metoda 3. Avem

$$x_n = n\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = n\Big(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big)$$

$$= n\Big(\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\mathrm{d}x\Big) = n\sum_{k=1}^{n}\Big(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\Big(f(x)\mathrm{d}x - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big)\mathrm{d}x\Big).$$

Aplicăm teorema de medie a lui Lagrange: există $c_{k,x} \in (x, \frac{k}{n})$ astfel încât $f(x) - f(\frac{k}{n}) = f'(c_{k,x})(x - \frac{k}{n})$. Deoarece funcția f' este derivabilă, restricția ei pe orice interval compact este mărginită și își atinge marginile, deci există $a_k, b_k \in [(k-1)/n, k/n]$ astfel încât

$$f'(a_k) \leqslant f'(x) \leqslant f'(b_k), \forall x \in [(k-1)/n, k/n].$$

Obținem

$$n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(b_k)\Big(x - \frac{k}{n}\Big)\mathrm{d}x \leqslant x_n \leqslant n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(a_k)\Big(x - \frac{k}{n}\Big)\mathrm{d}x.$$

Deoarece $\int_{(k-1)/n}^{k/n}(x-k/n)\mathrm{d}x=\frac{1}{2n^2}$, rezultă

$$-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f'(b_k)\leqslant x_n\leqslant -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f'(a_k).$$

Majorantul și minorantul obținute reprezintă sume Riemann ale funcției continue $-\frac{1}{2}f'$, asociate diviziunii $(0,1/n,\ldots,n/n)$ și punctelor intermediare $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$, respectiv $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, deci tind amândouă către

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\frac{f(0)-f(1)}{2},$$

valoare care reprezintă și limita lui x_n.

Metoda 4. Avem $x_n=n\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big)$. Integrând prin părți avem

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\Big(x-\frac{k-1}{n}\Big)'f(x)\mathrm{d}x=\Big(x-\frac{k-1}{n}\Big)f(x)\Big|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}$$
$$-\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\Big(x-\frac{k-1}{n}\Big)f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big)-\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\Big(x-\frac{k-1}{n}\Big)f'(x)\mathrm{d}x.$$

Aplicăm a doua teoremă de medie pentru integrale: dacă f este continuă pe $[a,b]$, g este integrabilă pe $[a,b]$ și $g(x)\geqslant 0,\forall x\in[a,b]$, atunci există $\xi\in[a,b]$ cu

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Astfel, pentru $g(x)=x-\frac{k-1}{n}\geqslant 0,\forall x\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$, integrabilă pe $[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$, există $\xi_k\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$ astfel încât

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\Big(x-\frac{k-1}{n}\Big)f'(x)\mathrm{d}x=f'(\xi_k)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\Big(x-\frac{k-1}{n}\Big)\mathrm{d}x=\frac{f'(\xi_k)}{2n^2}.$$

Rezultă

$$a_n=-n\sum_{k=1}^{n}\frac{f'(\xi_k)}{2n^2}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{f'(\xi_k)}{n}\to-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\frac{f(0)-f(1)}{2}.$$

Lăsăm ca temă următoarea problemă.

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-n\sum\limits_{k=1}^{n}f\Big(\frac{2k-1}{2n}\Big)\right)$, *unde* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *este de două ori derivabilă, cu derivata continuă.*

BIBLIOGRAFIE

[1] S. Chiriță, *Probleme de matematici superioare*, Editura Didactică și Pedagogică, București 1989.
[2] M. Ganga, *Teme pentru cercurile de elevi*, Editura Tehnică, 1991.
[3] Gh.Sirețchi, *Calcul diferențial și integral*, vol 1 și 2, Editura Științifică și Enciclopedică, București 1985.