PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE

Clasa a IX-a

13. a) Arătaţi că un pătrat poate fi împărţit în 6 pătrate, nu neapărat de aceeaşi dimensiune;

b) Arătaţi că un pătrat poate fi împărţit în 7 pătrate, nu neapărat de aceeaşi dimensiune;

c) Arătaţi că un pătrat poate fi împărţit în 8 pătrate, nu neapărat de aceeaşi dimensiune;

d) Arătaţi că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 6$, un pătrat poate fi împărţit în n pătrate, nu neapărat de aceeaşi dimensiune.

14. Determinaţi numerele naturale nenule $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ştiind că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \ldots + x_n^3 = (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)^2 .$$

15. Dacă $x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ radicali}}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, arătaţi că $[x_n]$ are aceeaşi valoare pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x).

16. Arătaţi că într-un triunghi dreptunghic ABC, $A = \dfrac{\pi}{2}$, avem:

a) $b \cos B + c \cos C = 2a \sin B \sin C$;

b) $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC;

c) $\dfrac{b^2}{\mathrm{tg} B} + \dfrac{c^2}{\mathrm{tg} C} = 4A_{\Delta ABC}$.

17. Se consideră triunghiul ABC cu lungimile laturilor $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Notăm cu P intersecţia medianei BD, unde $D \in (AC)$, cu bisectoarea CE, unde $E \in (AB)$. Determinaţi în funcţie de lungimile laturilor triunghiurilor ABC, numerele reale x şi y astfel încât $\overrightarrow{PA} = x \cdot \overrightarrow{PB} + y \cdot \overrightarrow{PC}$.

18. Demonstraţi că distanţa de la centrul cercului circumscris unui triunghi oarecare la o latură a sa este egală cu jumătatea distanţei de la ortocentrul triunghiului la vârful opus acelei laturi.

Clasa a X-a

19. Demonstraţi că funcţia $f:[-3,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x+3, & x\leqslant 0 \\ -x, & x>0 \end{cases}$ nu este strict monotonă, dar este injectivă.

20. Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to(1,+\infty)$, $f(x)=9^x+3^x+1$ este bijectivă.

21. Daţi exemple de funcţii $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ care să fie:

a) injective şi nesurjective ;

b) surjective şi neinjective.

Justificaţi.

22. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} 3x+a, & x<2 \\ x^2-4x+5, & x\geqslant 2 \end{cases}$, unde a este un număr real.

a) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia f este injectivă.

b) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia f este surjectivă.

c) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia $f$este bijectivă şi în acest caz să se calculeze inversa funcţiei f.

23. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\backslash\{3\}\to\mathbb{R}\backslash\{2\}, f(x)=\dfrac{2x-4}{x-3}$.

a) Demonstraţi că funcţia f este inversabilă şi calculaţi f^{-1}.

b) Rezolvaţi ecuaţia $f(x)=f^{-1}(x)$.

24. Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=z-3\overline{z}$ este bijectivă.