PENTRU CERCURILE DE ELEVI

APLICAŢII ALE IDENTITĂŢILOR ALGEBRICE ÎN TEORIA NUMERELOR

Rozalia Marinescu[1)] şi Steluţa Monea[2)]

Această lecţie, adresată elevilor din clasele VI-VIII, pune în evidenţă un set de probleme din teoria numerelor a căror soluţionare se bazează pe utilizarea unor identităţi algebrice cunoscute.

Teoria numerelor reprezintă un capitol important din matematică. Problemele asociate acestui domeniu au grade diferite de dificultate. În acest context, considerăm că acest material este extrem de util tuturor elevilor care doresc să se antreneze pe această temă. Scopul principal este de a pune în evidenţă un set de probleme dezvoltate în jurul unor identităţi algebrice cunoscute.

Prima identitate pe care o vom folosi este

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n+2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \tag{1}$$

valabilă pentru orice $a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Problema 1. *Fie n un număr compus. Atunci $a^n - b^n$ este număr compus, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a > b$ şi $n \in \mathbb{N}$, , $n \geq 2$.*

Soluţie. Fie $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \geqslant 2$ astfel încât $n = pq$. Aplicăm (1) succesiv şi atunci avem

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a^p)^q - (b^p)^q \\ &= (a^p - b^p)\left(a^{p(q-1)} + a^{p(q-2)}b^q + ..\right) \\ &= (a-b)\left(a^{q-1} + a^{q-2}b + \ldots\right)\left(a^{p(q-1)} + a^{p(q-2)}b^q + ..\right), \end{aligned}$$

ceea ce conduce la concluzia problemei.

Problema 2. *Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţi că $(2^b - 1) \vdots (2^a - 1)$ dacă şi numai dacă $b \vdots a$.*

Soluţie. Dacă $b \vdots a$, atunci există $c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $b = ac$. Atunci

$$2^b - 1 = 2^{ac} - 1 = (2^a)^c - 1 = (2^a - 1)\left(2^{a(c-1)} + 2^{a(c-2)} + \ldots + 2^a + 1\right),$$

deci $(2^b - 1) \vdots (2^a - 1)$.

Reciproc, fie $c, r \in \mathbb{N}$ astfel încât $b = ac + r$ şi $r < a$. Atunci

$$\begin{aligned} 2^b - 1 &= 2^{ac+r} - 1 = 2^{ac+r} - 2^r + 2^r - 1 = 2^r((2^a)^c - 1) + (2^r - 1) \\ &= 2^r(2^a - 1)(2^{a(c-1)} + 2^{a(c-2)} + \ldots + 2^a + 1) + (2^r - 1). \end{aligned}$$

[1)]Profesor,Colegiul Naţonal „Iancu de Hunedoara“, Hunedoara.
[2)]Profesor,Colegiul Naţonal „Decebal“, Deva.

Deoarece $(2^b-1) \vdots (2^a-1)$, deducem că $(2^r-1) \vdots (2^a-1)$. Dar $2^r-1 < 2^a-1$, deci $2^r-1=0$. Obţinem $r=0$, adică $b \vdots a$, ceea ce încheie demonstraţia.

Problema 3. *Fie $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$. Dacă 2^a-1 este număr prim, atunci a este număr prim.*

Soluţie. Dacă a nu ar fi prim, ar exista $p, q \in \mathbb{N}, p, q \geq 2$ astfel încât $a = pq$. Atunci am avea

$$2^a-1 = (2^p)^q - 1 = (2^p-1)\left(2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + \ldots + 2^p + 1\right),$$

adică 2^a-1 ar fi număr compus. Acest fapt contrazice ipoteza şi încheie demonstraţia.

Următoarea identitate pe care o vom valorifica este

$$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n+2}b + \ldots + ab^{n-2} - b^{n-1}\right), \qquad (2)$$

valabilă pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, impar.

Problema 4. *Determinaţi $x, y \in \mathbb{N}$ din egalitatea*

$$2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x = 5^y + 4.$$

Soluţie. Egalitatea se scrie $2^{2x+1} + 3^{2x+1} = 5^y + 4$. Dar

$$2^{2x+1} + 3^{2x+1} = (2+3)\left(2^{2x} - 2^{2x+1} \cdot 3 + \ldots\right),$$

deci $2^{2x+1} + 3^{2x+1}$ se divide cu 5. Atunci 5 divide 5^y+4. Obţinem $y=0$ şi apoi $x=0$.

Problema 5. *Fie $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geqslant 3$, impare. Demonstraţi că, dacă $(10^m+1, 10^n+1) = 11$ atunci $(m, n) = 1$.*

Soluţie. Fie $d = (m, n)$. Atunci există $p, q \in \mathbb{N}$, impare, cu $m = dp$ şi $n = dq$. Din (2) obţinem

$$10^m + 1 = (10^d)^p + 1 = (10^d+1)(10^{d(p-1)} - 10^{d(p-2)} + \ldots),$$

$$10^n + 1 = (10^d)^q + 1 = (10^d+1)(10^{d(q-1)} - 10^{d(q-2)} + \ldots),$$

de unde deducem că 10^d+1 este divizor comun pentru 10^m+1 şi 10^n+1. Atunci $10^d+1 = 11$, adică $d=1$, ceea ce este echivalent cu cerinţa problemei.

Demersul nostru continuă cu identitatea

$$x^4 + x^2 + 1 = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right), \qquad (3)$$

valabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Completăm cu următoarele aplicaţii.

Problema 6. *Demonstraţi că $111 \mid 10^{32} + 10^{16} + 1$.*

Soluţie. Din (3) deducem că, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$ şi $k \in \mathbb{N}^*$, avem că $a^{4k} + a^{2k} + 1$ este divizibil cu $a^{2k} + a^k + 1$. Aplicând succesiv acest lucru, deducem că $10^{32} + 10^{16} + 1$ se divide cu $10^2 + 10 + 1 = 111$.

Problema 7. *Determinaţi numerele* $x, p \in \mathbb{N}$ *şi* p *prim pentru care* $16^x + 4^x + 1 = p$.

Soluţie. Avem

$$16^x + 4^x + 1 = 2^{4x} + 2^{2x} + 1 = (2^{2x} - 2^x + 1)(2^{2x} + 2^x + 1).$$

Deoarece p este prim obţinem $2^{2x} - 2^x + 1 = 1$, adică $2^x(2^x - 1) = 0$. Suntem conduşi la $x = 0$ şi apoi la $p = 3$.

Ultima identitate pe care o vom menţiona în acest material este

$$a^4 + 4b^4 = \left(a^2 - 2ab + 2b^2\right)\left(a^2 + 2ab + 2b^2\right), \tag{4}$$

valabilă pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

Problema 8. *Determinaţi* $n \in \mathbb{N}^*$ *pentru care numărul* $n^4 + 4^n$ *este prim.*

Soluţie. Vom demonstra că singura valoare convenabilă este $n = 1$. Evident, dacă n este par atunci $n^4 + 4^n$ este par şi mai mare ca 2, deci nu este prim. Dacă n este impar, $n \geqslant 3$, atunci există $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $n = 2k + 1$. Atunci

$$n^4 + 4^n = n^4 + 4 \cdot 2^{4k} = (n^2 - 2n \cdot 2^k + 2 \cdot 2^{2k})(n^2 + 2n \cdot 2^k + 2 \cdot 2^{2k}),$$

conform lui (4). Cum

$$n^2 - 2n \cdot 2^k + 2 \cdot 2^{2k} = (n - 2^k)^2 + 2^k > 1,$$

deducem că $n^4 + 4^n$ este număr compus, ceea ce încheie demonstraţia.

Problema 9. *Fie* $a, b \in \mathbb{N}$, *nedivizibile cu* 5. *Demonstraţi că măcar unul dintre numerele* $a^2 - 2ab + 2b^2$ *şi* $a^2 + 2ab + 2b^2$ *se divide cu* 5.

Soluţie. Vom lucra modulo 5. Dacă a nu este divizibil cu 5, atunci $a^4 \equiv 1$, conform Teoremei lui Fermat. Analog $b^4 \equiv 1$, de unde $a^4 + 4b^4 \equiv 0$. De aici $\left(a^2 - 2ab + 2b^2\right)\left(a^2 + 2ab + 2b^2\right) \equiv 0$ şi concluzia este evidentă.

În încheiere invităm cititorii să caute, printre referinţele bibliografice, şi alte aplicaţii ale identităţilor prezentate în acest material sau eventual ale altor identităţi.

Bibliografie

[1] R. Gologan, D. Ş. Marinescu, M. Monea, *10 Years of Romanian Mathematical Competitions*, Ed. Paralela 45, 2018.

[2] *Colecţia Gazetei Matematice*, ediţia electronică.

[3] https://pregatirematematicaolimpiadejuniori.wordpress.com.