Clasa a IX-a

13. a) Arătaţi că, pentru orice numere reale pozitive a, b, c, avem $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9$.

b) Utilizând, eventual, inegalitatea de la a) pentru $a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$, unde x, y, $z \in (0, \infty)$, demonstraţi că $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}$.

14. Arătaţi că, pentru orice numere reale strict pozitive x, y, z, pentru care $x+y+z=1$, avem $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant 9$.

15. a) Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbb{R}$ avem $x(x+1)(x+2)(x+3) < (x^2+3x+1)^2$?

b) Arătaţi că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\left[\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\right]+\ldots+\left[\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right] = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

16. a) Fie ABC un triunghi, G centrul său de greutate şi M un punct din planul triunghiului. Arătaţi că $3\cdot\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

b) Demonstraţi că triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

17. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, de ortocentru H, astfel încât $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\cdot\overrightarrow{MH}$, oricare ar fi M din planul triunghiului. Demonstraţi că triunghiul ABC este echilateral.

18. Fie $[AB]$ şi $[CD]$ două coarde perpendiculare ale unui cerc de centru O. Dacă $AB\cap CD=\{T\}$, demonstraţi că $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}+\overrightarrow{TD}=2\cdot\overrightarrow{TO}$.

Clasa a X-a

19. Fie x un număr natural nenul. Arătaţi că numărul cifrelor numărului x este $[\lg x]+1$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului a.

20. Se consideră numerele reale pozitive u şi v astfel încât $u^4=4$ şi $v^6=17$. Dacă $m=\min\{u,v\}$ şi $M=\max\{u,v\}$, determinaţi mulţimea $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid m<\sqrt[3]{x}<M\}$.

21. Determinaţi valorile numărului real x pentru care este definită expresia $E(x)=\log_{\frac{x-1}{2x-1}}\left(\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-7x+3}\right)$.

22. Arătaţi că, pentru orice număr natural nenul n, numărul real x care verifică relaţia $x^3=n^3+n^2+2n+1$ este iraţional.

23. Fie $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\dfrac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+\ldots+\dfrac{1}{\log_x 2^n\cdot\log_x 2^{n+1}}$, unde n este un număr natural, $n\geqslant 5$.

a) Calculaţi $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

b) Rezolvaţi ecuaţia $f(x)=\dfrac{4n}{n+1}$.

24. Se consideră numărul real $x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.

a) Demonstraţi că $x^3=4-3x$.

b) Demonstraţi că $x\in\mathbb{Q}$.