O RAFINARE PENTRU O INEGALITATE DIN A.M.M.

MARIUS DRĂGAN[1)] şi NECULAI STANCIU[2)]

Abstract. This paper presents a refinement of the inequality from problem 12168 from AMM 3/2020.

Keywords: Jensen inequality, Mitrinović inequality, Gerretsen inequality, Euler inequality, geometric identities, geometric inequalities

MSC: 51M16, 26D05

În revista The American Mathematical Monthly (AMM), vol. 127, 3, martie, 2020, Martin Lukarevski din Macedonia propune spre rezolvare următoarea problemă:

Fie a, b şi c lungimile laturilor triunghiului ABC, cu R raza cercului circumscris şi r raza cercului înscris. Să se demonstreze că

$$\frac{2}{R} \leqslant \frac{1}{a\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{b\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{c\cos\frac{C}{2}} \leqslant \frac{1}{r}.$$

[1)]Profesor, Liceul „Mircea cel Bătrân“, Bucureşti.

[2)]Profesor, Şcoala gimnazială „George Emil Palade“ din Buzău

Soluţie. Avem

$$\frac{1}{a\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{b\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{c\cos\frac{C}{2}}=\frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin A\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin B\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin C\cos\frac{C}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{4R}\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}-\sin^3\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}-\sin^3\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}-\sin^3\frac{C}{2}}\right). \tag{1}$$

Considerăm funcţia $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sin x-\sin^3 x}$ şi avem că

$$f''(x)=\frac{9\sin^4 x-5\sin^2 x+2}{\sin^3 x\cos^4 x}.$$

Pentru $0<x<90^\circ$, $f''(x)>0$. Aplicând inegalitatea lui Jensen rezultă

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}-\sin^3\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}-\sin^3\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}-\sin^3\frac{C}{2}}$$

$$\geqslant 3\frac{1}{\sin\frac{A+B+C}{6}-\sin^3\frac{A+B+C}{6}}=3\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}=8. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă inegalitatea din stânga.

Mai departe, avem:

$$\frac{1}{a\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{b\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{c\cos\frac{C}{2}}=\frac{bc\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+ca\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+ab\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{abc\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}. \tag{3}$$

Notând $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ obţinem, folosind inegalitatea mediilor,

$$bc\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=bc\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}\cdot\frac{p(p-c)}{ab}}=\frac{bcp}{a\sqrt{bc}}\sqrt{(p-b)(p-c)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{p\sqrt{bc}}{a}\cdot\frac{p-b+p-c}{2}=\frac{p\sqrt{bc}}{2}. \tag{4}$$

Pe de altă parte,

$$abc\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=abc\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}\cdot\frac{p(p-b)}{ac}\cdot\frac{p(p-c)}{ab}}=p^2r. \tag{5}$$

Din (3), (4), (5) şi binecunoscuta inegalitate $xy+yz+zx \leqslant x^2+y^2+z^2$, rezultă

$$\frac{1}{a\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{b\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{c\cos\frac{C}{2}} \leqslant \frac{p(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})}{2p^2r} \leqslant \frac{a+b+c}{2pr} = \frac{1}{r},$$

adică am demonstrat şi inegalitatea din dreapta.

Pentru ambele inegalităţi, egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c$, adică în cazul triunghiului echilateral.

O rafinare a inegalităţii precedente

În orice triunghi ABC avem

$$\frac{3\sqrt{3}}{p} \leqslant \sum \frac{1}{a\cos\frac{A}{2}} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{p^2+r^2+4Rr}}{pr} \leqslant \frac{1}{r}\sqrt{\frac{15R-3r}{16R-5r}}. \qquad (*)$$

Demonstraţie. Inegalitatea din stânga este echivalentă cu

$$\sum \frac{1}{\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}} \geqslant \frac{12R\sqrt{3}}{p} \qquad (6)$$

Cu inegalitatea mediilor obţinem

$$\sum \frac{1}{\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{\left(\prod \sin\frac{A}{2}\right)\left(\prod \cos^2\frac{A}{2}\right)}}. \qquad (7)$$

Folosind egalităţile

$$\prod \sin\frac{A}{2} = \frac{r}{4R}, \quad \prod \cos\frac{A}{2} = \frac{p}{4R},$$

trebuie să demonstrăm

$$\frac{1}{\left(\prod \sin\frac{A}{2}\right)\left(\prod \cos\frac{A}{2}\right)^2} \geqslant \frac{64\cdot 3\sqrt{3}\cdot R^3}{p^3} \iff p \geqslant 3\sqrt{3}r,$$

i.e. inegalitatea lui Mitrinović.

Din (3), (4), (5) şi inegalitatea lui *Gerretsen* obţinem

$$\sum \frac{1}{\cos\frac{A}{2}} \leqslant \frac{p\sum bc}{2p^2r} \leqslant \frac{\sqrt{3\sum bc}}{2pr} = \frac{\sqrt{3(p^2+r^2+4Rr)}}{2pr} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2r}\sqrt{1+\frac{r^2+4Rr^2}{p^2}} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2r}\sqrt{1+\frac{r^2+4Rr^2}{16Rr-5r^2}} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{15R-3r}{16R-5r}}.$$

□

Remarcă. Inegalitatea $(*)$ reprezintă o rafinare a problemei din AMM, deoarece $\frac{2}{R} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{p} \iff p \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}R$, care este inegalitatea lui Mitrinović şi $\frac{1}{r}\sqrt{\frac{15R-3r}{16R-5r}} \leqslant \frac{1}{r} \iff R \geqslant 2r$, care este inegalitatea lui Euler.