Clasa a IX-a

12. Se consideră progresiile aritmetice $a_n : 1, 5, 9, \ldots$ şi $b_n : 2, 5, 8, \ldots$. Fie $(c_n)_{n \geqslant 1}$ şirul termenilor comuni ai şirurilor $(a_n)_{n \geqslant 1}$şi $(b_n)_{n \geqslant 1}$. Arătaţi că $(c_n)_{n \geqslant 1}$ este o progresie aritmetică şi determinaţi c_{100}.

13. Se numerotează 10 cutii de la 1 la 10 şi în fiecare cutie se aşază acelaşi număr de mere. După o oră, în fiecare cutie se pun câteva mere după regula: în cutia cu numărul n se adaugă n mere. Dacă acum sunt în total 145 de mere, câte mere au fost la început în fiecare cutie ?

14. Se consideră triunghiul ABC, cu $AB = 7$, $BC = 8$, $AC = 9$. Înălţimea din A intersectează pe BC în D, bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACB$ intersectează pe AD în P, iar BP intersectează AC în F.

a) Calculaţi $\dfrac{AP}{PD}$.

b) Calculaţi PD.

c) Calculaţi $\dfrac{AF}{FC}$.

15. Rezolvaţi ecuaţia $\left[\dfrac{3x-1}{5}\right] + \left[\dfrac{6x+3}{10}\right] = 1$.

16. Arătaţi că $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k\,(k+2)} < \dfrac{3}{4}$.

Clasa a X-a

17. Studiaţi injectivitatea şi surjectivitatea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x < 1 \\ x^2 - 2x + 5, & x \geqslant 1 \end{cases}$.

18. Stabiliţi dacă egalitatea de mai jos este adevărată pentru orice numere reale strict pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$:

$$\log_{a_1} b_1 \cdot \log_{a_2} b_2 \cdot \ldots \cdot \log_{a_n} b_n = \log_{a_1} b_2 \cdot \log_{a_2} b_3 \cdot \ldots \cdot \log_{a_{n-1}} b_n \cdot \log_{a_n} b_1.$$

19. Arătaţi că dacă $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| < \dfrac{1}{3}$, atunci $\left|(-1+i)\,z^3 + iz\right| < \dfrac{11}{27}$.

20. Dacă $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$, atunci $\dfrac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R}^*$ (este pur imaginar) $\Leftrightarrow |z| = 1$.

21. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt[6-x]{2x+1} = \sqrt[x-1]{2x^2-5}$.

22. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $4^x + 4^{\frac{1}{x}} = 8$.