Clasa a IX-a

13. Fie $A = \left\{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Z},\, x^2 - 3y^2 = 1\right\}$.
Arătaţi că dacă $a, b \in A$, atunci $ab \in A$.

14. Arătaţi că există o infinitate de numere iraţionale α, astfel încât $\alpha^2 - 5\alpha$ este număr natural.

15. Fie $(a_n)_n$ o progresie aritmetică de numere naturale cu raţia 3. Arătaţi că există o infinitate de termeni care nu sunt puteri (cu exponent mai mare sau egal cu 2) a niciunui număr natural.

16. Fie $(a_n)_n$ o progresie geometrică cu

$$a_+a_2 + a_3 = 7 \text{ şi } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 62.$$

Arătaţi că raţia progresiei este număr iraţional.

17. Rezolvaţi ecuaţia $3[x] - \{x\} = 2019$, $x \in \mathbb{R}$.

18. Rezolvaţi ecuaţia $\sqrt{5x+4} = x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

Clasa a X-a

19. Arătaţi că $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$, oricare ar fi numărul natural n.

20. Rezolvaţi ecuaţia $\sqrt[4]{3x-2} + \sqrt[3]{x+7} = 3$, $x \in \mathbb{R}$.

21. Calculaţi $\displaystyle\sum_{k=1}^{2019} \frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2} + \sqrt[3]{k^2+k} + \sqrt[3]{k^2}}$.

22. Determinaţi numerele complexe z cu proprietatea că

$$|z+3| + |2z-5| + |3z+4| = 7.$$

23. Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $(z+\mathrm{i})^{100} + (z-\mathrm{i})^{100} = 0$. Arătaţi că z este număr real.

24. Fie $z \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{2}$. Calculaţi $z^{2019} + \dfrac{1}{z^{2019}}$.