PENTRU CERCURILE DE ELEVI

CAZUL DE (NE)CONGRUENŢĂ ULL

Cristinel Mortici[1)]

În problemele de geometrie, nu puţine sunt cazurile când apar triunghiuri care au câte două laturi şi câte un unghi respectiv congruente, dar nu sunt în poziţia LUL. Nefiind un caz clasic de congruenţă a triunghiurilor, rezolvitorul poate trece uşor peste aceste informaţii relative la poziţia acestor triunghiuri, fără a le folosi. În această lecţie vom arăta cum pot fi folosite aceste informaţii despre perechi de triunghiuri aflate în situaţia de mai sus.

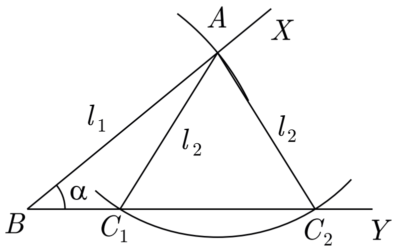
În acest sens, să analizăm următoarea problemă de construcţie geometrică cu rigla şi compasul.

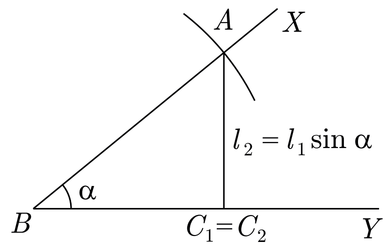
Problemă. *Se consideră* $l_1, l_2 > 0$ *şi* $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. *Să se construiască un triunghi* ΔABC *cu proprietatea ca* $AB = l_1$, $AC = l_2$ *şi* $\sphericalangle ABC = \alpha$.

Rezolvare. Fie unghiul $\sphericalangle XBY = \alpha$. Pe semidreapta $(BX$ alegem punctul A astfel încât $AB = l_1$. Cu vârful compasului în A şi cu deschiderea egală cu l_2 se trasează un arc de cerc ω care, în general, intersectează semidreapta $(BY$ în două puncte, să zicem C_1 si C_2. Există aşadar două ,,tipuri" de triunghi în acest caz: ΔABC_1 şi ΔABC_2.

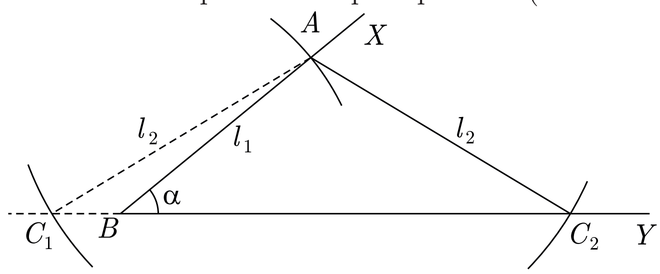
Pentru a fi riguroşi, să menţionăm că, dacă $l_2 < l_1 \sin\alpha$, problema nu are soluţii, iar dacă $l_2 = l_1 \sin\alpha$, atunci arcul ω intersectează $(BY$ într-un singur punct şi există un singur tip de triunghi cu proprietăţile din enunţ.

[1)]Prof. univ.dr., Universitatea „Valahia“, Târgovişte.



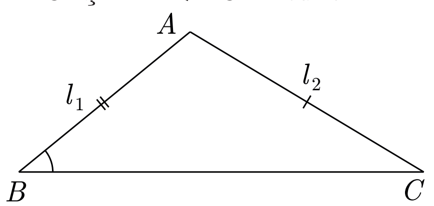


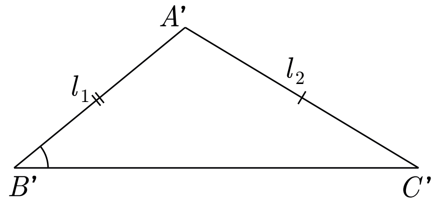
Să observăm în continuare că dacă l_2 este „prea mare”, atunci ω intersecteaza semidreapta $(BY$ într-un singur punct, celălalt punct de intersecţie cu dreapta BY fiind situat pe semidreapta opusă lui $(BY$.



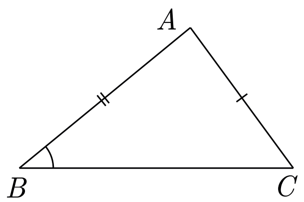
Ca o consecinţă a acestui fapt, stabilim următorul

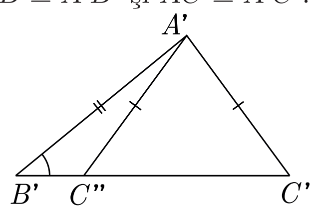
Criteriu de congruenţă ULL pentru triunghiuri. Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri astfel încât $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$, $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv$ $\equiv A'C'$ şi $AB < AC$. Atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.





Conform analizei dinainte, dacă în criteriul de congruenţă anterior se renunţă la condiţia $AB < AC$, atunci, în general, există două tipuri de triunghiuri $A'B'C'$ (pe care le notăm în figura următoare $A'B'C'$ şi $A'B'C''$) pentru care avem $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$, $AB \equiv A'B'$ şi $AC \equiv A'C'$.





Vom spune că triunghiurile $\Delta A'B'C'$ şi $\Delta A'B'C''$ sunt *prietenele* triunghiului ΔABC.

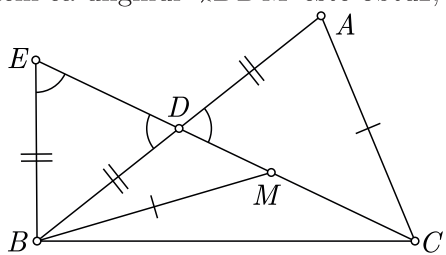
Următoarea problemă a fost dată la olimpiadă în Polonia în anul 2014.

Aplicaţie. *În* ΔABC, *există un punct* M *pe mediana* CD *astfel încât* $BM = AC$. *Demonstraţi că* $\sphericalangle BMD = \sphericalangle ACD$.

Soluţie. Întâi, remarcăm faptul că $\frac{1}{2}AB < AC$, deoarece $AC > AD$ în triunghiul ΔACD sau $BM > BD$ în triunghiul ΔBMD, după cum unghiul $\sphericalangle ADC$ sau $\sphericalangle BDM$ este obtuz.

Fie $E \in (MD$, $E \neq D$ astfel încât $BD = BE$.

Dacă presupunem că unghiul $\sphericalangle BDM$ este obtuz, atunci $D \in (EM)$.



Avem $BE = BD = AD$ şi $\sphericalangle E = \sphericalangle D_1 = \sphericalangle D_2$.

Acum, $\sphericalangle MEB = \sphericalangle CDA$, $EB = DA$, $BM = AC$, iar din $\frac{1}{2}AB < AC$ rezultă că $AD < AC$ şi $BE < BM$. Suntem în cazul de congruenţă ULL prezentat anterior şi obţinem $\Delta EBM \equiv \Delta DAC$ (ΔDBM este prieten cu acestea). În consecinţă, $\sphericalangle BMD = \sphericalangle DCA$.

Cazul când unghiul $\sphericalangle ADC$ este obtuz se rezolvă analog.

Pentru a lăsa în centrul atenţiei metoda propusă, am ales să prezentăm numai o singură aplicaţie, dar avem convingerea că ideile din această lecţie sunt utile şi în alte cazuri.