GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Fondată în anul 1895

Anul CXXIV nr. 3 **martie 2019**

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

UN REZULTAT DE TIPUL CONJECTURII LUI ANDRICA

Marcel Ţena[1)]

Abstract. It is shown that, if $k \geq 3$ and p_n is the n-th prime, then

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[k]{p_{n+1}} - \sqrt[k]{p_n}\right) = 0,$$

and, consequently, the inequality $\sqrt[k]{p_{n+1}} - \sqrt[k]{p_n} < 1$ holds for large n. (When $k = 2$, the above inequality is *Andrica*'s conjecture).

Then we prove the generalization

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} (p_{n+1}^{\alpha} - p_n^{\alpha}) = 0, \quad \text{for } 0 < \alpha < \tfrac{19}{40}.$$

Keywords: *Andrica*'s conjecture, *Baker-Harman-Pintz* theorem, *Lagrange* theorem, twin primes.

MSC: 11A41

În [1] *Dorin Andrica* a formulat următoarea ipoteză.

Conjectura lui Andrica. *Dacă p_n este al n-lea număr prim, atunci*

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1$$

pentru orice număr natural $n \geq 1$.

În [2] *R. C. Baker, G. Harman* şi *J. Pintz*, investigând diferenţa dintre două numere prime consecutive, obţin următorul rezultat puternic:

Teoremă (Baker-Harman-Pintz). *Există un rang natural N' astfel încât pentru orice număr natural $n \geq N'$ avem*

$$p_{n+1} - p_n < p_n^{\frac{21}{40}}.$$

În această notă vom studia diferenţa $\sqrt[k]{p_{n+1}} - \sqrt[k]{p_n}$, unde $k \geq 3$ este un număr natural, arătând că limita acestei diferenţe când $n \longrightarrow \infty$ este zero, de unde vom obţine că $\sqrt[k]{p_{n+1}} - \sqrt[k]{p_n} < 1$, pentru orice număr natural n

[1)]Prof. dr., Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti.

depăşind un rang N''. Vom da apoi o generalizare pentru o diferenţă de tipul $p_{n+1}^{\alpha} - p_n^{\alpha}$, cu $0 < \alpha < \dfrac{19}{40}$.

Teorema 1. *Fie $k \geq 3$ un număr natural. Atunci*:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (\sqrt[k]{p_{n+1}} - \sqrt[k]{p_n}) = 0.$$

Demonstraţie. Pentru orice $n \geq N'$, unde N' are semnificaţia din teorema *Baker-Harman-Pintz*, putem scrie

$$\sqrt[k]{p_{n+1}} - \sqrt[k]{p_n} = \frac{p_{n+1} - p_n}{\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \sqrt[k]{p_{n+1}^{k-1-i} p_n^i}} < \frac{p_{n+1} - p_n}{k \sqrt[k]{p_n^{k-1}}} < \frac{p_n^{\frac{21}{40}}}{k p_n^{1-\frac{1}{k}}} = \frac{1}{k p_n^{\frac{19}{40} - \frac{1}{k}}}.$$

Reţinem aşadar că, pentru orice $n \geq N'$, avem:

$$\sqrt[k]{p_{n+1}} - \sqrt[k]{p_n} < \frac{1}{k p_n^{\frac{19}{40} - \frac{1}{k}}}. \tag{1}$$

Cum $k \geq 3$, rezultă $\dfrac{1}{k} \leq \dfrac{1}{3} < \dfrac{19}{40}$, prin urmare $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{p_n^{\frac{19}{40} - \frac{1}{k}}} = 0$ şi atunci din (1), cu criteriul majorării, obţinem:

$$\lim_{n \to \infty} (\sqrt[k]{p_{n+1}} - \sqrt[k]{p_n}) = 0.$$

Teorema 2. *Există un rang natural N'' astfel încât pentru orice număr natural $n \geq N''$ avem*

$$\sqrt[k]{p_{n+1}} - \sqrt[k]{p_n} < 1$$

pentru toate numerele naturale $k \geq 3$.

Demonstraţie. Din teorema 1 rezultă că pentru fiecare $k \geq 3$ există $n_k \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_k$ avem

$$\sqrt[k]{p_{k+1}} - \sqrt[k]{p_k} < 1. \tag{2}$$

Vom arăta că putem alege un acelaşi rang pentru toţi $k \geq 3$. Să observăm că funcţia $f_n : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(t) = p_{n+1}^t - p_n^t$ este strict crescătoare, întrucât

$$f_n'(t) = p_{n+1}^t \ln p_{n+1} - p_n^t \ln p_n > p_n^t \ln p_{n+1} - p_n^t \ln p_n = p_n^t (\ln p_{n+1} - \ln p_n) > 0.$$

Atunci, pentru $k \geq 3$, avem $\dfrac{1}{k} \leq \dfrac{1}{3}$, deci $f_n\left(\dfrac{1}{k}\right) \leq f_n\left(\dfrac{1}{3}\right)$, adică

$$\sqrt[k]{p_{n+1}} - \sqrt[k]{p_n} \leq \sqrt[3]{p_{n+1}} - \sqrt[3]{p_n}. \tag{3}$$

Luând acum $N'' = n_3$ şi folosind (2) şi (3), avem pentru orice $n \geq N''$:

$$\sqrt[k]{p_{n+1}} - \sqrt[k]{p_n} \leq \sqrt[3]{p_{n+1}} - \sqrt[3]{p_n} < 1.$$

Teorema 3. *Fixăm un număr real α cu $0 < \alpha < \dfrac{19}{40}$. Atunci*:

1° *Avem* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(p_{n+1}^{\alpha}-p_n^{\alpha})=0.$

2° *Există un rang natural* $N(\alpha)$ *astfel încât, pentru orice* $n\geq N(\alpha)$:

$$p_{n+1}^{\alpha}-p_n^{\alpha}<1.$$

Demonstraţie. 1° Considerăm funcţia $g_n:[p_n,p_{n+1}]\longrightarrow\mathbb{R}$, $g_n(t)=t^{\alpha}$, căreia îi aplicăm teorema lui *Lagrange*. Există aşadar $c_n\in(p_n,p_{n+1})$ astfel încât

$$p_{n+1}^{\alpha}-p_n^{\alpha}=(p_{n+1}-p_n)\cdot\alpha c_n^{\alpha-1}=\frac{\alpha(p_{n+1}-p_n)}{c_n^{1-\alpha}}. \tag{4}$$

Deoarece $c_n>p_n$, din (4) şi teorema *Baker-Harman-Pintz*, avem pentru $n\geq N'$:

$$p_{n+1}^{\alpha}-p_n^{\alpha}<\frac{\alpha p_n^{\frac{21}{40}}}{p_n^{1-\alpha}}=\frac{\alpha}{p_n^{\frac{19}{40}-\alpha}}. \tag{5}$$

Deoarece $\dfrac{19}{40}-\alpha>0$, din (5) şi criteriul majorării rezultă

$$\lim_{n\to\infty}(p_{n+1}^{\alpha}-p_n^{\alpha})=0.$$

2° Rezultă din 1°.

Comentarii.

1) Teorema 3 este, evident, o generalizare a teoremelor 1 şi 2, dar, din punct de vedere didactic, am considerat că este bine să fie expuse separat.

2) Conjectura lui *Andrica* a fost dovedită cu ajutorul calculatorului pentru toate numerele prime mai mici ca 2^{53}.

3) În [3] *Laurenţiu Panaitopol* arată că $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\inf(\sqrt{p_{n+1}}-\sqrt{p_n})=0$, de unde rezultă că există o infinitate de numere n pentru care conjectura lui *Andrica* este adevărată.

4) Conjectura lui *Andrica* este adevărată pentru orice două numere prime gemene p_n, p_{n+1}, adică pentru care $p_{n+1}-p_n=2$. Într-adevăr,

$$\sqrt{p_{n+1}}-\sqrt{p_n}=\frac{p_{n+1}-p_n}{\sqrt{p_{n+1}}+\sqrt{p_n}}=\frac{2}{\sqrt{p_{n+1}}+\sqrt{p_n}}<\frac{2}{2\sqrt{p_n}}=\frac{1}{\sqrt{p_n}}\leq\frac{1}{\sqrt{2}}<1.$$

Nu se ştie însă dacă există o infinitate de perechi de numere prime gemene, această afirmaţie fiind la rândul său o conjectură celebră.

BIBLIOGRAFIE

[1] D. Andrica, *Note on a conjecture in prime number theory*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math. 31, 1986, 44-48.

[2] R.C. Baker, G. Harman, J. Pintz, *The difference between consecutive primes II*, Proc. London Math. Soc. 83(3), 2001, 532-562.

[3] L. Panaitopol, *Problema 141*, G.M.-A 1/1973.

[4] M. Ţena, *Conjectura lui Andrica în conexiune cu alte conjecturi despre numere prime*, G.M.- B 1/2009, 5-10.