

Clasa a IX-a

13. O progresie aritmetică $(a_n)_n$ are rația $r = \frac{1}{2}a_5$. Calculați suma primilor cinci termeni în funcție de a_1 .

14. O progresie aritmetică $(b_n)_n$ are $b_1 = 1$ și rația $q = \sqrt{2}$. Arătați că $(b_{2n})_{n \geq 1}$ este o progresie geometrică de numere iraționale.

15. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit astfel: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 2$, $n \geq 1$. Determinați a_{2019} .

16. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este nemărginit.

17. Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$. Determinați imaginea funcției f .

18. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x + a$, unde a este un număr real. Determinați valorile lui a pentru care f este impară.

Clasa a X-a

19. Arătați că pentru orice număr natural $n \geq 2$, numărul

$$\sqrt[n]{\sqrt{10} + 3} + \sqrt[n]{\sqrt{10} - 3}$$

este irațional.

20. Fie $z \in \mathbb{C}^*$ cu $z + \frac{5}{z} = 1$. Calculați $|z|$.

21. Reprezentați în plan mulțimea punctelor de afix $z \in \mathbb{C}$ cu

$$|z + i| = |z - 1 - i|.$$

22. Rezolvați ecuația $(z + i)^5 - 2(z - i)^5 = 0$, $z \in \mathbb{C}$.

23. Fie $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. Câte elemente are mulțimea $U_8 \cup U_{12}$.

24. Determinați numerele complexe z astfel încât $|z - 5| = 1$ și $|z| \leq 4$.