ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

GENERALIZAREA UNEI PROBLEME DE CONCURS

Ovidiu Buică[1)]

Abstract. This note points to a possible generalization of a shortlisted problem from IMO 1992

Keywords: circumscribed polygon, continuous function

MSC: 51M15, 05A05

Pe lista scurtă OIM 1992 apare problema următoare.

P1. *Arătaţi că există un poligon convex cu* 1992 *laturi ce satisface condiţiile:*

(i) *lungimile laturilor sunt numerele* $1, 2, 3, \ldots, 1992$*, într-o ordine convenabilă;*

(ii) *poligonul este circumscris unui cerc.*

Vom analiza în continuare următoarea generalizare:

P2. *Să se determine numerele naturale* $n \geq 4$ *cu proprietatea că există un poligon cu* n *laturi care satisface următoarele condiţii:*

(i) *lungimile laturilor sale sunt numerele* $1, 2, 3, \ldots, n$*, într-o ordine convenabilă;*

(ii) *poligonul este circumscris unui cerc.*

Vom demonstra mai întâi următoarea:

Lemă. Există un poligon circumscriptibil cu n laturi $A_1A_2A_3\ldots A_n$, cu $A_1A_2 = a_1$, $A_2A_3 = a_2, \ldots, A_nA_1 = a_n$ dacă şi numai dacă sistemul

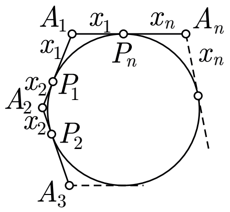
---

[1)]Profesor, Liceul Teoretic „Grigore Moisil", Timişoara

$$(S)\begin{cases} x_1+x_2=a_1\\ x_2+x_3=a_2\\ \vdots\\ x_{n-1}+x_n=a_{n-1}\\ x_n+x_1=a_n\end{cases}$$

are o soluţie în $\mathbb{R}_+^n$.

Demonstraţie. Presupunem că poligonul există. Fie P_i punctele de tangenţă ale laturii A_iA_{i+1} cu cercul înscris ($A_{n+1}=A_1$). Atunci



$x_1=A_1P_1=A_1P_n$, $x_2=A_2P_1=A_2P_2,\ldots,$ $x_n=A_nP_{n-1}=A_nP_n$ reprezintă o soluţie pentru (S).

Reciproc, dacă (S) admite soluţia reală pozitivă $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, alegem un cerc de rază arbitrară r şi trasăm linia poligonală $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ tangentă cercului de rază r în $P_1,P_2,\ldots,P_n$ astfel încât $A_1P_1=$ $=A_{n+1}P_n=x_1$, $A_iP_i=A_iP_{i-1}=x_i$, $i=2,3,\ldots,n$.

Avem $OA_1=OA_{n+1}=\sqrt{x_1^2+r^2}$, iar funcţia $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$,

$$f(r)=\mathrm{m}(\sphericalangle A_1OA_2)+\mathrm{m}(\sphericalangle A_2OA_3)+\ldots+\mathrm{m}(\sphericalangle A_nOA_{n+1})=$$
$$=2\left(\operatorname{arctg}\frac{x_1}{r}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{x_n}{r}\right)$$ este continuă.

Rezultă că $A_1A_2A_3\ldots A_nA_{n+1}$ este o linie poligonală închisă dacă şi numai dacă există $r>0$ astfel încât $f(r)=2\pi$. Dar acest r există, deoarece $\lim\limits_{r\to 0}f(r)=n\pi$ şi $\lim\limits_{r\to\infty}f(r)=0$. $\square$

Din Lemă reiese că existenţa poligonului cerut de P2 este echivalentă cu existenţa soluţiei sistemului S. Vom arăta că existenţa acestei soluţii depinde de restul lui $n(\mathrm{mod}\,4)$.

Cazul I: $n=4k$. În acest caz luăm permutarea laturilor dată de

$$a_i=\begin{cases} i-1 & ,i\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)\\ i & ,i\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)\\ i & ,i\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)\\ i+1 & ,i\equiv 3(\mathrm{mod}\,4).\end{cases}$$

Atunci, o soluţie pentru S este

$$x_i=\begin{cases} i-1-a & ,i\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)\\ a & ,i\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)\\ i-1-a & ,i\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)\\ 1+a & ,i\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)\end{cases}$$

cu $a\in(0,1)$.

Cazul II: $n=4k+1$. Din S rezultă $x_2=a_1-x_1$, $x_3=a_2-x_2=$ $=a_2-a_1+x_1$, $x_4=a_3-x_3=a_3-a_2+a_1-x_1$, …, $x_{4k+1}=a_{4k}-x_{4k}=$ $=a_{4k}-a_{4k-1}+a_{4k-2}-\ldots+a_2-a_1+x_1$. Cum $x_1+x_{4k+1}=a_{4k+1}$, rezultă că $2x_1=a_{4k+1}-a_{4k}+a_{4k-1}-a_{4k-2}+a_{4k-3}-a_{4k-4}+\ldots+a_5-a_4+a_3-a_2+a_1$.

Această relaţie sugerează următoarele valori a_i, precum şi $x_1 = \frac{1}{2}$:

$$a_i = \begin{cases} i+1 & , i \equiv 0 (\bmod 4) \\ i-1 & , i \equiv 1 (\bmod 4), i > 1 \\ i & , i \equiv 2 (\bmod 4) \\ i & , i \equiv 3 (\bmod 4) \\ 1 & , i = 1. \end{cases}$$

De aici, prin eliminări succesive şi utilizând inducţia matematică se obţine o soluţie pentru (S):

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2},\ x_{4k+1} = \dfrac{8k-1}{2} & , k \geq 1 \\ x_{4k+2} = \dfrac{1}{2} & , k \geq 0 \\ x_{4k+3} = \dfrac{8k+3}{2} & , k \geq 0 \\ x_{4k} = \dfrac{3}{2} & , k \geq 1 \end{cases}$$

sau, echivalent,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}, x_i = \frac{3}{2} & , i \equiv 0 (\bmod 4) \\ x_i = \dfrac{1}{2} & , i \equiv 2 (\bmod 4) \\ x_i = \dfrac{2i-3}{2} & , i \equiv 1 (\bmod 4),\ i \geq 2 \\ x_i = \dfrac{2i-3}{2} & , i \equiv 3 (\bmod 4). \end{cases}$$

Cazul III: $n = 4k+2$. În acest caz, se observă din S că $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{4k-1} + a_{4k+1} = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{4k} + a_{4k+2}$ (relaţie echivalentă cu $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{4k-1} + x_{4k} + x_{4k+1} + x_{4k+2} = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \ldots + x_{4k} + x_{4k+1} + x_{4k+2} + x_1$).

Observăm că $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{4k+1} + a_{4k+2} = 2(a_1 + a_3 + \ldots + a_{4k+1})$ este număr par. Pe de altă parte, $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{4k+1} + a_{4k+2} = \dfrac{(4k+2)(4k+3)}{2} = (2k+1)(4k+3)$ este număr impar.

În concluzie, S nu are soluţie în acest caz.

Cazul IV: $n = 4k+3$. Atribuim lui a_i, x_i valori ca în cazul II.

Astfel, numerele cu proprietatea cerută sunt cele de forma $4k$, $4k+1$ şi $4k+3$.

Bibliografie

[1] The Thirty-Third IMO Moscow, Russia, 1992, Shortlisted Problems.