ASUPRA PROBLEMEI 27381

ANCA STOLERIU[1)]

Abstract. This note points to the importance of finding significant solutions of a functional equation

Keywords: functional equation, Cauchy, Jensen, semigroup

MSC: 39B05

În această notă matematică determinăm soluţiile unor ecuaţii funcţionale de tipul celor din enunţul problemei **27381** din G.M.-B nr. 5/2017. Într-o serie de cazuri, aceste soluţii se reduc doar la funcţiile constante, de unde reiese importanţa identificării unor elemente nebanale care verifică un set de condiţii matematice. Restul cazurilor sunt în directă legătură cu ecuaţiile funcţionale ale lui *Cauchy* şi *Jensen*.

Reamintim cerinţa problemei **27381** din G.M.-B nr. 5/2017, autor *Daniel Sitaru*.

Fie $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *o funcţie cu proprietatea că*

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 10f\left(\frac{1}{x+y}\right),$$

oricare ar fi $x, y \in (0, +\infty)$. *Să se arate că*

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right) + f\left(\frac{1}{z}\right) = 25f(1),$$

oricare ar fi $x, y, z > 0$ *cu* $x + y + z = 1$.

Vom demonstra mai întâi un rezultat mai general, care are în vedere determinarea funcţiilor ce verifică o proprietate de tipul celei din ipoteza problemei.

[1)]Profesor, Colegiul Tehnic „Mihail Sturdza", Iaşi

În enunţurile următoare vom considera o submulţime M cu cel puţin 3 elemente a mulţimii numerelor reale, înzestrată cu o lege de compoziţie asociativă „$*$".

Propoziţia 1. *Fie $m, n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Dacă $f : M \to \mathbb{R}$ este o funcţie cu proprietatea că $f(x * y) = mf(x) + nf(y)$, pentru orice $x, y \in M$, atunci funcţia f este constantă.*

Demonstraţie. Pentru $x, y, z \in M$ arbitrar alese, avem $f((x * y) * z) = f(x * (y * z))$ şi, utilizând relaţia din ipoteză, rezultă

$$\left(m^2 - m\right) f(x) = \left(n^2 - n\right) f(z)$$

pentru orice $x, z \in M$, unde $m^2 - m, n^2 - n \in \mathbb{R}^*$.

În cazul $m^2 - m = n^2 - n$ rezultă imediat că $f(x) = c$ pentru orice $x \in M$. Din relaţia iniţială obţinem că, dacă $m + n = 1$, atunci soluţie este orice funcţie constantă, iar dacă $m + n \neq 1$, singura soluţie este funcţia nulă.

În cazul $m^2 - m \neq n^2 - n$, avem $f(x) = cf(z)$, cu $c \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ şi rezultă că $\left(c^2 - 1\right) f(x) = 0$. Dacă $c \neq -1$, rezultă că $f(x) = 0$, pentru orice $x \in M$. Dacă $c = -1$, se obţine $f(x) = -f(z)$ pentru orice $x, z \in M$ şi considerând $x = z$, rezultă că $f(x) = 0$, pentru orice $x \in M$.

Consecinţă. *Dacă $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ are proprietatea că*

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 10f\left(\frac{1}{x+y}\right)$$

pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$, atunci f este funcţia nulă.

Demonstraţie. Relaţia din enunţ se scrie $f(x) + f(y) = 10f\left(\dfrac{xy}{x+y}\right)$ şi suntem în ipotezele Propoziţiei, cu $m = n = \dfrac{1}{10}$, $M = (0, \infty)$ şi legea de compoziţie asociativă $x * y = \dfrac{xy}{x+y}$. □

Observaţia 1. Funcţia neconstantă $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ are proprietatea

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{1}{x+y}\right),$$

oricare ar fi $x, y \in (0, +\infty)$, dacă şi numai dacă $f = g \circ f_1$, unde $f_1 : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$ şi $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ este restricţia la intervalul $(0, +\infty)$ a unei funcţii aditive.

Demonstraţie. Relaţia dată se scrie

$$(f \circ f_1)(x + y) = (f \circ f_1)(x) + (f \circ f_1)(y),$$

pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$, deci reprezintă ecuaţia funcţională *Cauchy* pe $(0, +\infty)$ (remarcăm faptul că mulţimea soluţiilor ecuaţiei funcţionale a lui *Cauchy* are cardinalul $\mathfrak{C}^{\mathfrak{C}}$, unde $\mathfrak{C}$ este puterea continuului).

Observaţia 2. Utilizând aceeaşi idee de demonstraţie, se arată că rezultatul din Propoziţia 1 are loc pentru orice funcţii $f : M' \to V$ care verifică relaţia din enunţ, unde $(M', *)$ este un semigrup cu cel puţin 3 elemente şi $(V, +, \cdot)$ este un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial.

Studiem acum ecuaţii funcţionale de tipul celei din concluzia exerciţiului.

Propoziţia 2. *Fie m un număr real. Funcţia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ are proprietatea*

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right) + f\left(\frac{1}{z}\right) = mf(1),$$

oricare ar fi $x, y, z > 0$ cu $x + y + z = 1$ dacă şi numai dacă

$$f(x) = \begin{cases} a, & x = 1 \\ -2g\left(\dfrac{x-1}{2x}\right) + \dfrac{2g(1)}{3} + \dfrac{ma}{3}, & x \in (1, 2] \\ g\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{g(1)}{3} + \dfrac{ma}{3}, & x \in (2, \infty) \end{cases},$$

unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie aditivă.

Demostraţie. Notând

$$u(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{mf(1)}{3}$$

pentru $x \in (0, 1)$, relaţia din ipoteză se scrie $u(x) + u(y) + u(z) = 0$ pentru orice $x, y, z > 0$ cu $x + y + z = 1$. De aici avem că $2u(x) + u(1 - 2x) = 0$ pentru orice $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ şi atunci

$$u(x) + u(y) = -u(1 - x - y) = 2u\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

pentru orice $x, y \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, deci funcţia u verifică ecuaţia lui *Jensen* pe intervalul $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Soluţiile acestei ecuaţii sunt funcţiile $u(x) = g(x) + b$, $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie aditivă, iar b este o constantă reală. Pentru $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ obţinem $u(x) = -2u\left(\frac{1-x}{2}\right) = -2g\left(\frac{1-x}{2}\right) - 2b$.

Considerăm $x, y, z > 0$ cu $x + y + z = 1$ şi studiind pe rând cazurile $x, y, z \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, respectiv $x, y \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $z \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, arătăm că funcţiile $u : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definite prin relaţiile de mai sus verifică $u(x) + u(y) + u(z) = 0$ pentru $b = -\frac{g(1)}{3}$. Cum $f(x) = u\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{mf(1)}{3}$ pentru $x \in (1, +\infty)$, obţinem funcţiile de forma dată în enunţ, care verifică într-adevăr ecuaţia dată. În mod evident, orice prelungire a unei astfel de funcţii la o mulţime mai amplă păstrează proprietatea din enunţ.

Bibliografie

[1] V. Pop, *Ecuaţii funcţionale. Ecuaţii clasice şi probleme*, Editura Mediamira, Cluj Napoca, 2002.
[2] Colecţia Gazeta Matematică, 2017 - 2018.