ASUPRA EXISTENŢEI PUNCTELOR FIXE COMUNE A DOUĂ FUNCŢII CARE COMUTĂ

Eugen Păltănea[1)]

Abstract. In this note, the existence of common fixed points of two commuting functions, mapping a compact interval into itself, is specified under the assumptions of continuity or monotony.

Keywords: commuting functions, fixed point

MSC: 55M20; 54H25

În cele ce urmează ne propunem să precizăm câteva rezultate instructive privitoare la existenţa punctelor fixe comune a două funcţii definite pe un interval real compact cu valori în el însuşi, în ipoteza că cele două funcţii comută la compunere. Această problematică, extinsă în diverse contexte matematice generale, a fost amplu studiată începând cu anii $'60$. Literatura matematică consemnează o gamă bogată de caracterizări ale perechilor de funcţii care comută şi au puncte fixe comune. O trecere în revistă a rezultatelor semnificative din domeniu este realizată de *E. L. McDowell* (2009).

Prezentarea de faţă se rezumă la cazul funcţiilor continue sau monotone pe intervalul unitate $I = [0, 1]$. Reamintim pentru început faptul că funcţiile continue şi cele monoton crescătoare, definite pe I, cu valori în I, admit puncte fixe.

Astfel, dacă $f : I \to I$ este continuă pe I, atunci funcţia $h : I \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - x$, este continuă şi satisface inegalităţile $h(0) \geq 0$ şi $h(1) \leq 0$, deci admite o rădăcină $a \in I$, reprezentând un punct fix pentru f.

Fie acum $f : I \to I$ o funcţie monoton crescătoare. Considerăm mulţimea, nevidă şi mărginită, $A = \{x \in I | x \leq f(x)\}$, cu $0 \in A$. Fie $a = \sup A \in I$. Pentru $x \in A$, avem $x \leq a$, deci $f(x) \leq f(a)$. Cum $x \leq f(x)$, obţinem $x \leq f(a)$. Rezultă că $f(a)$ este un majorant al mulţimii A. Atunci

[1)] Conf. dr., Universitatea „Transilvania“, Braşov.

$a \leq f(a)$ (deci $a \in A$), de unde $f(a) \leq f(f(a))$. Astfel, $f(a) \in A$. Ca urmare, $f(a) \leq a$. Obţinem $f(a) = a$. Menţionăm că acest rezultat reprezintă un caz particular al teoremei de punct fix a lui *Knaster-Tarski*.

Fie funcţiile $f, g : I \to I$. Vom spune că f şi g comută dacă $f \circ g = g \circ f$. Un punct fix comun celor două funcţii este număr real a din intervalul I cu proprietatea $f(a) = a = g(a)$.

Ritt (1923) demonstrează existenţa unui punct fix comun unei perechi de funcţii polinomiale care comută. Dar continuitatea impusă perechilor de funcţii care comută pe un interval compact nu asigură de la sine existenţa unui punct fix comun. Astfel, *W. M. Boyce* (1969) oferă un contraexemplu, obţinut printr-o construcţie rafinată. Rezultatul următor este datorat lui *J.H. Folkman* (1966).

Propoziţia 1. *Fie două funcţii continue $f, g : I \to I$. Dacă funcţiile comută, iar una dintre funcţii este monotonă, atunci există un punct fix comun.*

Enunţul de mai sus, formulat ca problemă de concurs (pentru cazul când una dintre funcţiile continue considerate este presupusă monoton crescătoare), a stat în atenţia comisiei de selecţie a subiectelor Olimpiadei Naţionale de Matematică 2018, Satu Mare.

Următorul rezultat întăreşte Propoziţia 1.

Propoziţia 2. *Fie două funcţii $f, g : I \to I$ care comută. Dacă f este monoton crescătoare, iar g este continuă, atunci f şi g admit un punct fix comun.*

Demonstraţie. Fie $B = \{x \in I \mid x \leq g(x)\}$. Avem $0 \in B$, deci $B \neq \emptyset$. Notăm $b = \sup B \in I$. Există un şir $(b_n)_{n \geq 1}$, cu termenii în B, astfel ca $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$. Trecând la limită în inegalitatea $b_n \leq g(b_n)$, $n \geq 1$, obţinem

$$b \leq g(b),$$

pe baza continuităţii funcţiei g.

Dacă $b = 1$, atunci $1 \leq g(1) \leq 1$, deci $g(1) = 1$.

Pentru $b < 1$, presupunem prin reducere la absurd că $b < g(b)$. Cum funcţia $h(x) = g(x) - x$, $x \in I$, este continuă şi strict pozitivă în b, există $c \in (b, 1)$ astfel ca $h(x) > 0$, $\forall\, x \in (b, c)$. Rezultă $(b, c) \subset B$, în contradicţie cu $b = \sup B$. Prin urmare, $b = g(b)$. Din $f(b) = f(g(b)) = g(f(b))$ deducem $f(b) \in B$, deci $f(b) \leq b$.

Dacă $f(b) = b$, existenţa punctului fix comun este dovedită.

În cazul $f(b) < b$, mulţimea $A = \{x \in I \mid f(x) < x = g(x)\}$ este nevidă. Fie $a = \inf A \in I$. Din continuitatea lui g rezultă $a = g(a)$. Dacă $a = f(a)$, atunci a este un punct fix comun.

Să presupunem $a < f(a)$. Atunci există $x_0 \in A \cap [a, f(a))$. În acest caz avem $f(x_0) < x_0 < f(a)$, iar pe de altă parte, din inegalitatea $a \leq x_0$ şi monotonia crescătoare a lui f, obţinem $f(a) \leq f(x_0)$; contradicţie.

În sfârşit, să presupunem $f(a) < a$ (adică $a \in A$). Atunci
$$f(f(a)) \leq f(a) = f(g(a)) = g(f(a)).$$
Dacă $f(f(a)) < f(a)$, obţinem $f(a) \in A$, cu $f(a) < a = \inf A$; contradicţie. Astfel, $f(f(a)) = f(a) = g(f(a))$, deci $f(a)$ este un punct fix comun funcţiilor f şi g, ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Este interesant de consemnat faptul că, în absenţa unei cerinţe de continuitate, monotonia crescătoare a două funcţii care comută pe I reprezintă o condiţie suficientă pentru existenţa unui punct fix comun.

Propoziţia 3. *Două funcţii monoton crescătoare $f, g : I \to I$ care comută admit un punct fix comun.*

Demonstraţie [*V. Braşoveanu, M. Tetiva* (2014)]. Fie
$$A = \{x \in I \mid x \leq f(x) \text{ şi } x \leq g(x)\}.$$
Mulţimea A este nevidă deoarece $0 \in A$. Notăm $a = \sup A \in [0,1]$.

Fie $x \in A$. Datorită monotoniei funcţiilor f şi g, din $x \leq a$ rezultă $f(x) \leq f(a)$ şi $g(x) \leq g(a)$ Cum $x \leq f(x)$ şi $x \leq g(x)$, rezultă $x \leq f(a)$ şi $x \leq g(a)$. Astfel, $f(a)$ şi $g(a)$ sunt majoranţi ai mulţimii A. Atunci $a \leq f(a)$ şi $a \leq g(a)$ (deci $a = \max A$). Pe de altă parte, din monotonia funcţiilor obţinem $f(a) \leq f(f(a))$ şi $f(a) \leq f(g(a)) = g(f(a))$, de unde $f(a) \in A$. Analog arătăm $g(a) \in A$. Atunci $f(a) \leq a$ şi $g(a) \leq a$. Rezultă $f(a) = a = g(a)$. $\square$

BIBLIOGRAFIE

[1] W. M. Boyce, Commuting functions with no common fixed points, *Trans. Amer. Math. Soc.* **137** (1969), 77-92.

[2] V. Braşoveanu, M. Tetiva, De la o problemă de pe forum la conjectura funcţiilor continue care comută, *Recreaţii matematice* Nr. 2/2014, 134-139.

[3] E. L. McDowell, Coincidence values of commuting functions, *Topology Proceedings*, Vol. **34** (2009), 365-384.

[4] J. H. Folkman, On functions that commute with full functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **17** (1966), 383-386.

[5] J. F. Ritt, Permutable rational functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **25** (1923), 399-448.

[6] A 69-a Olimpiadă Naţională de Matematică, Satu Mare - Negreşti Oaş, 3-7 aprilie 2018, Gazeta Matematică, Supliment.