

Clasa a IX-a

13. Arătați că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + [x]$ este strict crescătoare.

14. Determinați imaginea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x + 1}$.

15. Aflați mulțimea perioadelor funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \left\{ \frac{x}{\sqrt{2018}} \right\}$.

16. Fie $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 \neq a_2$ și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât dreptele $x = a_1$ și $x = a_2$ sunt axe de simetrie ale graficului funcției f . Arătați că f este periodică.

17. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodică cu perioadele 2 și $\sqrt{3}$. Arătați că f nu are perioadă principală.

18. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + x$. Determinați a astfel încât f să fie funcție impară.

Clasa a X-a

19. Fie $z \in \mathbb{C}^*$ cu $z + \frac{1}{z} = 4$. Calculați $z^4 + \frac{1}{z^4}$.

20. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f injectivă, cu proprietatea că $f \circ f(x) = f(3x + 5)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Determinați funcția f .

21. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f surjectivă, cu proprietatea că $f \circ f = f$. Determinați funcția f .

22. Arătați că funcția $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right\}$ este injectivă.

23. Aflați inversa funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow (5, \infty)$, $f(x) = 2^x + 5$.

24. Dați un exemplu de funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, bijectivă și nemonotonă.