O CLASĂ DE GRUPURI COMUTATIVE

Dana Heuberger[1)] şi Marian Cucoaneş[2)]

Abstract. In this paper we establish some properties of a group G which is simultaneously a n - Abelian group and a $n+2$ - Abelian group, where n is an integer. We give some interesting and elementary proofs of the necessary and sufficient conditions for G to be an abelian group.

Keywords: commutative group, endomorphism

MSC: 20K27, 20K30

1. Introducere

Fie n un număr întreg. Un grup se numeşte $n-$abelian, dacă funcţia $f : G \to G, \ \ f(x) = x^n$ este un endomorfism. În cărţile [1] şi [7] se află următorul rezultat, publicat anterior într-un volum AMM:

Propoziţia 1.1. *Dacă n este un număr întreg şi $(G, \cdot)$ este un grup astfel încât pentru orice $x, y \in G$ următoarele afirmaţii sunt adevărate,*

$$(xy)^n = x^n y^n$$
$$(xy)^{n+1} = x^{n+1} y^{n+1}$$
$$(xy)^{n+2} = x^{n+2} y^{n+2}$$

atunci grupul este comutativ.

Este natural să ne întrebăm dacă alegând doar două dintre cele trei endomorfisme din Propoziţia 1.1 putem obţine aceeaşi concluzie. În lucrările [2], [3], [4], se găsesc unele condiţii generale în care dacă grupul G este

[1)] Profesor, Colegiul Naţional „Gh. Şincai“, Baia Mare, dana.heuberger@yahoo.com

[2)] Profesor, Grup Şcolar Mărăşeşti, gabrielacucoanes@yahoo.com

prietăţile de mai sus.

Revedem mai întâi câteva proprietăţi necesare pentru a demonstra acest rezultat.

Definiţia 1.2. *Dacă $(G,\cdot)$ este un grup, atunci centrul acestuia este mulţimea*

$$Z(G)=\{a\in G \mid ax=xa, \forall x\in G\}.$$

Propoziţia 1.3. *Dacă $(G,\cdot)$ este un grup, atunci centrul acestuia $Z(G)$ este un subgrup al lui G.*

Propoziţia 1.4. *Dacă H este un subgrup al grupului $(G,\cdot)$ şi k,n sunt numere întregi astfel încât $x^k, x^n\in H$, atunci $x^{(k,n)}\in H$, unde (k,n) este cel mai mare divizor comun al numerelor k şi n.*

2. Rezultatele principale

Pentru un grup G, notăm $E(G)=\{n\in\mathbb{Z} \mid (xy)^n=x^ny^n, \forall x,y\in G\}$.

Următoarele proprietăţi sunt imediate:

Propoziţia 2.1. *Dacă $n,m\in E(G)$, atunci $nm\in E(G)$.*

Demonstraţie. Deoarece aplicaţiile $x\mapsto x^n$ şi $x\mapsto x^m$ sunt endomorfisme ale grupului G, rezultă că şi compunerea lor este un endomorfism al acestuia. □

Propoziţia 2.2. *Dacă $n\in E(G)$, atunci $1-n\in E(G)$.*

Demonstraţie. Avem

$$x^ny^n=(xy)^n=x(yx)^{n-1}y\Leftrightarrow x^{n-1}y^{n-1}=(yx)^{n-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (yx)^{1-n}=\left(x^{n-1}y^{n-1}\right)^{-1}=y^{1-n}x^{1-n},\ \forall x,y\in G.$$

Aşadar, $1-n\in E(G)$. □

Demonstraţie. [1] Deoarece $n \in E(G)$, din Propoziţia 2.1 şi Propoziţia 2.2 rezultă că $n(1-n) \in E(G)$. Fie $x, y \in G$. Atunci

$$(xy)^{n(n-1)} = \left((xy)^{-1}\right)^{n(1-n)} = \left(y^{-1}x^{-1}\right)^{n(1-n)} = \left(y^{-1}\right)^{n(1-n)}\left(x^{-1}\right)^{n(1-n)} =$$

$$= y^{n(n-1)}x^{n(n-1)} = \left(y^{n-1}\right)^{n}(x^{n})^{n-1} \overset{P.2.3}{=} (x^{n})^{n-1}\left(y^{n-1}\right)^{n} =$$

$$= (x^{-1})^{n(1-n)}(y^{-1})^{n(1-n)} = (x^{-1}y^{-1})^{n(1-n)} = \left((yx)^{-1}\right)^{n(1-n)} = (yx)^{n(n-1)}.$$

Observaţia 2.6. *Dacă $n \in E(G)$, atunci $\forall x \in G, x^{n^2-n} \in Z(G)$.*

Demonstraţie. Deoarece $n \in E(G)$, din demonstraţia Lemei 2.5. rezultă că $n^2 - n = n(n-1) \in E(G)$. Fiindcă $n(1-n) \in E(G)$, din Propoziţia 2.2 deducem că şi $n^2 - n + 1 = 1 - n(1-n) \in E(G)$. Folosind Propoziţia 2.4, obţinem că $\forall x \in G, x^{n^2-n} \in Z(G)$. □

Iată două cazuri particulare care ne-au condus spre cel general.

Problema 2.7. *Dacă grupul G este în acelaşi timp 5-abelian şi 7-abelian, arătaţi că G este comutativ.*

Soluţie. Din Lema 2.5 deducem:

$$\forall\ x, y \in G,\ (xy)^{20} = (yx)^{20} \tag{1}$$

şi

$$\forall\ x, y \in G,\ (xy)^{42} = (yx)^{42}. \tag{2}$$

Obţinem

$$(xy)^2 = (xy)^{42} \cdot \left((xy)^{20}\right)^{-2} \overset{(1),(2)}{=} (yx)^{42} \cdot \left((yx)^{20}\right)^{-2} = (yx)^{42} \cdot (yx)^{-40} = (yx)^2.$$

Atunci,

$$(xy)^6 = \left((xy)^2\right)^3 = \left((yx)^2\right)^3 = (yx)^6$$

---

[1] Dată de *Marian Andronache*.

Deoarece $(2016 \cdot 2015, 2018 \cdot 2017) = 2$, există întregii p şi q astfel încât

$$2 = ap + bq,$$

unde $a = 2016 \cdot 2015$ şi $b = 2018 \cdot 2017$. Atunci,

$$(xy)^2 = ((xy)^a)^p \cdot \left((xy)^b\right)^q \overset{(4),(5)}{=} ((yx)^a)^p \cdot \left((yx)^b\right)^q = (yx)^2$$

adică

$$\forall\, x, y \in G,\ (xy)^2 = (yx)^2\,. \tag{6}$$

Grupul G este 2016−abelian, deci $\forall\, x, y \in G, (xy)^{2016} = x^{2016}y^{2016}$. Obţinem

$$\forall\, x, y \in G,\ (yx)^{2015} = x^{2015}y^{2015}. \tag{7}$$

Grupul G este 2018−abelian, aşadar $\forall x, y \in G, (xy)^{2018} = x^{2018}y^{2018}$. Reiese

$$\forall\, x, y \in G,\ (yx)^{2017} = x^{2017}y^{2017}. \tag{8}$$

Din (6), deducem

$$\forall\, x, y \in G,\ (xy)^{2016} = (yx)^{2016}\,. \tag{9}$$

Din (8), rezultă

$$(yx)\,(yx)^{2016} = x^{2017} \cdot y^{2017} \overset{(9)}{\Leftrightarrow} (yx)\,(xy)^{2016} = x^{2017} \cdot y^{2017} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow yx \cdot x^{2016}y^{2016} = x^{2017}y^{2017}.$$

Din egalitatea precedentă obţinem

$$\forall\, x, y \in G,\ yx^{2017} = x^{2017}y. \tag{10}$$

Aşadar $x^{2017} \in Z\,(G)\,,\ \forall x \in G$. Din (8) obţinem

$$\forall\, x, y \in G,\ (yx)^{2017} = x^{2017}y^{2017} = y^{2017}x^{2017},$$

adică $2017 \in E\,(G)$. Deoarece $2016, 2018 \in E\,(G)$, din Propoziţia 1.1 rezultă că grupul este comutativ. $\square$

că $1-n, -1-n \in E(G)$. Folosind Propoziţia 2.1, deducem că

$$n^2-1=(1-n)(-1-n) \in E(G)$$

şi apoi că $n^2 \in E(G)$. Din Propoziţia 2.4 rezultă

$$\forall x \in G,\ x^{n^2-1} \in Z(G). \tag{11}$$

Din Propoziţia 2.1 obţinem că $n^2+2n+1=(-1-n)^2 \in E(G)$ şi $n^2+2n=n(n+2) \in E(G)$. Folosind Propoziţia 2.4, rezultă:

$$\forall x \in G,\ x^{n^2+2n} \in Z(G). \tag{12}$$

Deoarece $Z(G)$ este un subgrup al lui G, folosind relaţiile (11) şi (12), deducem că

$$\forall\ x \in G,\ x^{2n+1}=x^{n^2+2n-n^2+1} \in Z(G) \tag{13}$$

şi

$$\forall\ x \in G,\ x^{n+2}=x^{n(2n+1)-2\left(n^2-1\right)} \in Z(G). \tag{14}$$

În final, rezultă că $\forall x \in G,\ x^3=x^{2(n+2)-(2n+1)} \in Z(G)$.

b) Cazul I: Dacă $n=3s$, cu $s \in \mathbb{Z}$, din (14) obţinem că pentru orice $x \in G$, $x^{3s+2} \in Z(G)$. Deoarece $x^3 \in Z(G)$ şi $(3, 3s+2)=1$, folosind Propoziţia 1.4 deducem că

$$\forall\ x \in G, x \in Z(G).$$

Aşadar grupul este comutativ.

Cazul II: Dacă $n=3s-1$, cu $s \in \mathbb{Z}$, din (14) avem că pentru orice $x \in G$, $x^{3s+1} \in Z(G)$. Deoarece $x^3 \in Z(G)$ şi $(3, 3s+1)=1$, folosind Propoziţia 1.4 deducem că

$$\forall\ x \in G, x \in Z(G).$$

În consecinţă grupul este comutativ şi în acest caz.

[1] Andrei G., Caragea C., Ene V., *Culegere de probleme pentru examene de admitere şi olimpiade şcolare*, Ed. Scorpion 7, Bucureşti, 1995, 117-129.

[2] Deaconescu M., *Asupra comutativităţii grupurilor*, Gazeta Matematică seria B, nr. 4-5, 1990, 133-134.

[3] Durbin J. R., *Commutativity and n-Abelian Groups*, Mathematische Zeitschrift 98 (1967) Springer, 89-92.

[4] Heuberger D. (coord.), Pop V., *Matematică de excelenţă pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă, Clasa a XII-a*, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2014, 83-91.

[5] *Problema 26208*, Gazeta Matematică seria B, 3, 2016, 156.

[6] Kurosh A. G., *The Theory of Groups*, Chelsea Publishing Company New York, N. Y., 1956.

[7] Năstăsescu C., Ţena M., Andrei G., Otărăşanu I., *Probleme de structuri algebrice*, Ed. Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti, 1988, 37-38.

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

APLICAŢII ALE INEGALITĂŢII LUI GERRETSEN

Gheorghe Alexe[1)] şi George-Florin Şerban[2)]

În această lecţie vom prezenta câteva aplicaţii ale inegalităţii lui *Gerretsen*.

Pentru început vom prezenta câteva rezultate cunoscute.

Considerăm triunghiul ABC. Fie p semiperimetrul triunghiului, R raza cercului circumscris triunghiului, r raza cercului înscris triunghiului, r_a, r_b, r_c razele cercurilor exînscrise, S aria. Se cunosc relaţiile:

1) $R \geq 2r$ (inegalitatea lui *Euler*).

2) $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

3) $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

1) Profesor, Liceul Pedagogic „D. P. Perpessicius“ Brăila

2) Profesor, Liceul Pedagogic „D. P. Perpessicius“ Brăila