# ASUPRA PROBLEMEI 27508

GHEORGHE STOICA[1)]

**Abstract**. This article fixes an error in the problem 27508 from the number 3/2018 of this journal

**Keywords:** complex coordinates, area

**MSC:** 51M04

În Gazeta Matematică-Seria B nr. 3/2018, pag. 151, d-l *Iulian Micu* din Craiova a propus următoarea problemă:

*Fie* $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ *numere complexe distincte de module egale. Notăm cu* $S$ *aria triunghiului cu vârfurile în punctele de afixe* $a, b, c$.

(i) *Să se arate că* $\left|b^2-a^2\right|+\left|c^2-b^2\right|+\left|a^2-c^2\right|=4S$.

(ii) *Să se arate că dacă* $\left|b^2-a^2\right|+\left|a^2-c^2\right|=4S$, *atunci triunghiul este dreptunghic.*

Rezolvarea problemei, cu enunţ corectat, a apărut în G.M.-B nr. 9/2018. În cele ce urmează vom arăta că relaţia de la punctul (i) nu este mereu adevărată, vom da un enunţ corectat pe care îl vom demonstra şi apoi vom demonstra o generalizare.

Fie $a=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, $b=1$, $c=i$. Rezultă că $|a|=|b|=|c|=1$ şi $\left|b^2-a^2\right|=\left|1^2-\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^2\right|=\sqrt{3}$, $\left|c^2-b^2\right|=\left|\mathrm{i}^2-1^2\right|=2$, $\left|a^2-c^2\right|=$

[1)]Profesor, Colegiul Naţional de Informatică „Carmen Sylva“, Petroşani.

$= \left| \left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \mathrm{i}^2 \right| = 1$. Dacă $A\left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)$, $B(1)$, $C(\mathrm{i})$ rezultă că $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ şi atunci

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{1}{2}(0-1) + 1\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 0\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \right| = \frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

.

Cu acestea, $\left|b^2 - a^2\right| + \left|c^2 - b^2\right| + \left|a^2 - c^2\right| = \sqrt{3} + 2 + 1 = \sqrt{3} + 3$ şi $4S = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{4} = \sqrt{3} - 1$, şi am arătat astfel că relaţia (i) nu este mereu adevărată.

Un posibil enunţ corectat este următorul.

*Fie $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ numere complexe distincte de module egale. Notăm cu $S$ aria triunghiului cu vârfurile în punctele de afixe $a, b, c$.*

(i) *Să se arate că dacă triunghiul este ascuţitunghic, atunci*

$$\left|a^2 - b^2\right| + \left|b^2 - c^2\right| + \left|c^2 - a^2\right| = 4S.$$

(ii) *Să se arate că dacă $\left|a^2 - b^2\right| + \left|c^2 - a^2\right| = 4S$, atunci triunghiul este dreptunghic.*

(iii) *Să se arate că dacă triunghiul este obtuzunghic, atunci $-\left|a^2 - b^2\right| + \left|b^2 - c^2\right| + \left|c^2 - a^2\right| = 4S$ sau $\left|a^2 - b^2\right| - \left|b^2 - c^2\right| + \left|c^2 - a^2\right| = 4S$ sau $\left|a^2 - b^2\right| + \left|b^2 - c^2\right| - \left|c^2 - a^2\right| = 4S$.*

*Demonstraţie.* Fie $A(a), B(b), C(c)$ aflate în planul complex având originea în centrul $O$ al cercului circumscris triunghiului $ABC$ şi $A', B', C'$ mijloacele laturilor $[BC], [CA]$ şi $[AB]$.

Rezultă că $A'\left(\frac{b+c}{2}\right)$, $B'\left(\frac{c+a}{2}\right)$, $C'\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

(i) Dacă triunghiul $ABC$ este ascuţitunghic, atunci centrul $O$ al cercului său circumscris se află în interiorul triunghiului şi avem (figura 1)

$$S = \mathcal{A}_{\Delta ABC} = \mathcal{A}_{\Delta OAB} + \mathcal{A}_{\Delta OBC} + \mathcal{A}_{\Delta OCA} =$$
$$= \frac{AB \cdot OC'}{2} + \frac{BC \cdot OA'}{2} + \frac{CA \cdot OB'}{2} =$$
$$= \frac{|a-b| \cdot \left|\frac{a+b}{2}\right|}{2} + \frac{|b-c| \cdot \left|\frac{b+c}{2}\right|}{2} + \frac{|c-a| \cdot \left|\frac{c+a}{2}\right|}{2} =$$
$$= \frac{\left|a^2 - b^2\right| + \left|b^2 - c^2\right| + \left|c^2 - a^2\right|}{4}$$

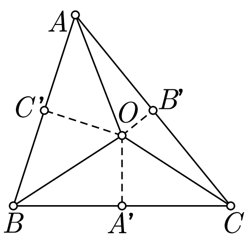

figura 1

şi de aici imediat relaţia (i). Este adevărată şi afirmaţia reciprocă.

(ii) Presupunem că $\left|a^2 - b^2\right| + \left|c^2 - a^2\right| = 4S$. Rezultă

$$\frac{|a-b| \cdot \left|\frac{a+b}{2}\right|}{2} + \frac{|c-a| \cdot \left|\frac{c+a}{2}\right|}{2} = S \Leftrightarrow \frac{AB \cdot OC'}{2} + \frac{CA \cdot OB'}{2} = S \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{\Delta OAB} + A_{\Delta OCA} = S \Rightarrow O = A' \Rightarrow \mathrm{m}(\sphericalangle A) = 90^\circ$$

şi deci triunghiul $ABC$ este dreptunghic în $A$. Este adevărată şi afirmaţia reciprocă.

Se procedează analog şi cu celelalte două relaţii.

(iii) Dacă triunghiul $ABC$ este obtuzunghic, atunci centrul $O$ al cercului său circumscris se află în exteriorul triunghiului. Făcând o alegere, să presupunem că $O$ are faţă de latura $[AB]$ distanţa mai mică strict decât faţă de celelate laturi ale triunghiului.

În acest caz

$$\begin{aligned} S = A_{\Delta ABC} &= -A_{\Delta OAB} + A_{\Delta OBC} + A_{\Delta OCA} \\ &= -\frac{AB \cdot OC'}{2} + \frac{BC \cdot OA'}{2} + \frac{CA \cdot OB'}{2} \\ &= -\frac{|a-b| \cdot \left|\frac{a+b}{2}\right|}{2} + \frac{|b-c| \cdot \left|\frac{b+c}{2}\right|}{2} + \frac{|c-a| \cdot \left|\frac{c+a}{2}\right|}{2} \\ &= \frac{-\left|a^2-b^2\right| + \left|b^2-c^2\right| + \left|c^2-a^2\right|}{4} \end{aligned}$$

şi de aici imediat prima relaţie de la (iii). Este adevărată şi afirmaţia reciprocă.

Celelalte două relaţii se demonstrează analog.

Cum faptele că punctul $O$ este interior, sau pe o latură sau exterior sunt echivalente cu faptele că triunghiul este ascuţitunghic sau dreptunghic sau obtuzunghic, rezultă că relaţiile de la (i), (ii) şi (iii) constituie condiţii necesare şi suficiente ca punctul $O$ să fie interior, pe o latură sau exterior.

În cele ce urmează vom demonstra următoarea generalizare:

*Fie* $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*, (n \geqslant 3)$ *numere complexe distincte de module egale. Fie* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *de afixe* $z_1, z_2, \ldots, z_n$, $O$ *centrul cercului circumscris şi* $S$ *aria poligonului* $A_1A_2\ldots A_n$. *Atunci*:

(i) $O$ *este interior poligonului* $A_1A_2\ldots A_n$ *dacă şi numai dacă are loc relaţia*

$$\left|z_1^2 - z_2^2\right| + \left|z_2^2 - z_3^2\right| + \ldots + \left|z_n^2 - z_1^2\right| = 4S.$$

(ii) $O$ *este pe o latură a poligonului* $A_1A_2\ldots A_n$ *dacă şi numai dacă are loc una dintre relaţiile*

$$\varepsilon_1\left|z_1^2 - z_2^2\right| + \varepsilon_2\left|z_2^2 - z_3^2\right| + \ldots + \varepsilon_n\left|z_n^2 - z_1^2\right| = 4S,$$

*obţinute când* $n-1$ *dintre numerele* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ *sunt egale cu* 1 *şi unul este egal cu* 0.

(iii) $O$ *este exterior poligonului* $A_1A_2\ldots A_n$ *dacă şi numai dacă are loc una dintre relaţiile*

$$\varepsilon_1\left|z_1^2 - z_2^2\right| + \varepsilon_2\left|z_2^2 - z_3^2\right| + \ldots + \varepsilon_n\left|z_n^2 - z_1^2\right| = 4S,$$

*obţinute când $n-1$ dintre numerele $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ sunt egale cu 1 şi unul este egal cu $-1$.*

*Demonstraţie.* Deoarece $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n|$, rezultă că originea planului complex este $O$. Fie $B_1, B_2, \dots, B_n$ mijloacele laturilor $[A_1A_2]$, $[A_2A_3], \dots, [A_nA_1]$. Atunci $OB_1 \perp A_1A_2, OB_2 \perp A_2A_3, \dots, OB_n \perp A_nA_1$ şi $B_1\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right), B_2\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right), \dots, B_n\left(\frac{z_n+z_1}{2}\right)$.

(i) Dacă $O$ este interior poligonului $A_1A_2\dots A_n$ rezultă

$$\begin{aligned} S = \mathcal{A}_{A_1A_2\dots A_n} &= \mathcal{A}_{\Delta OA_1A_2} + \mathcal{A}_{\Delta OA_2A_3} + \dots + \mathcal{A}_{\Delta OA_nA_1} \\ &= \frac{1}{2}A_1A_2 \cdot OB_1 + \frac{1}{2}A_2A_3 \cdot OB_2 + \dots + \frac{1}{2}A_nA_1 \cdot OB_n \\ &= \frac{1}{2}\Big(|z_1 - z_2| \cdot \Big|\frac{z_1+z_2}{2}\Big| + |z_2 - z_3| \cdot \Big|\frac{z_2+z_3}{2}\Big| + \dots + |z_n - z_1| \cdot \Big|\frac{z_n+z_1}{2}\Big|\Big) \\ &= \frac{1}{4}\big|z_1^2 - z_2^2\big| + \frac{1}{4}\big|z_2^2 - z_3^2\big| + \dots + \frac{1}{4}\big|z_n^2 - z_1^2\big| \end{aligned}$$

şi de aici $\left|z_1^2 - z_2^2\right| + \left|z_2^2 - z_3^2\right| + \dots + \left|z_n^2 - z_1^2\right| = 4S$, ceea ce trebuia arătat.

Reciproca se obţine imediat folosind metoda reducerii la absurd şi cele demonstrate la punctele (ii) şi (iii).

(ii) Făcând o alegere, presupunem că $O \in [A_1A_2]$ (figura 2). Rezultă că $O = B_1$ şi că $[A_1A_2]$ este diametru al cercului circumscris poligonului $A_1A_2\dots A_n$. În acest caz,

$$\begin{aligned} S = \mathcal{A}_{A_1A_2\dots A_n} &= \mathcal{A}_{\Delta OA_2A_3} + \mathcal{A}_{\Delta OA_3A_4} + \dots + \mathcal{A}_{\Delta OA_nA_1} \\ &= \frac{A_2A_3 \cdot OB_2}{2} + \frac{A_3A_4 \cdot OB_3}{2} + \dots + \frac{A_nA_1 \cdot OB_n}{2} \\ &= \frac{|z_2 - z_3| \cdot \left|\frac{z_2+z_3}{2}\right|}{2} + \frac{|z_3 - z_4| \cdot \left|\frac{z_3+z_4}{2}\right|}{2} + \dots + \frac{|z_n - z_1| \cdot \left|\frac{z_n+z_1}{2}\right|}{2} \\ &= \frac{\left|z_2^2 - z_3^2\right|}{4} + \frac{\left|z_3^2 - z_4^2\right|}{4} + \dots + \frac{\left|z_n^2 - z_1^2\right|}{4}, \end{aligned}$$

adică am obţinut relaţia pentru $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (0, 1, 1, \dots, 1)$. Celelalte relaţii se obţin analog. Reciproca se obţine imediat folosind metoda reducerii la absurd şi cele demonstrate la punctele (i) şi (iii).

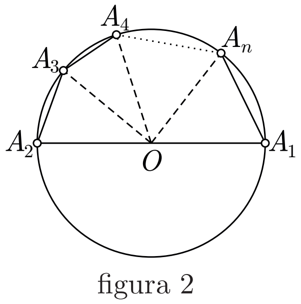

figura 2

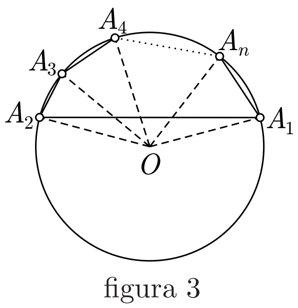

figura 3

(iii) Presupunem că $O$ este exterior poligonului $A_1A_2\dots,A_n$. Făcând o alegere, presupunem că poligonul şi $O$ sunt de o parte şi de cealaltă a laturii $[A_1A_2]$ (figura 3). În acest caz,

$$\begin{aligned}S &= \mathcal{A}_{A_1A_2\dots A_n} = -\mathcal{A}_{\Delta OA_1A_2} + \mathcal{A}_{\Delta OA_2A_3} + \dots + \mathcal{A}_{\Delta OA_nA_1}\\ &= -\frac{A_1A_2\cdot OB_1}{2} + \frac{A_2A_3\cdot OB_2}{2} + \dots + \frac{A_nA_1\cdot OB_n}{2}\\ &= -\frac{|z_1-z_2|\cdot\left|\dfrac{z_1+z_2}{2}\right|}{2} + \frac{|z_2-z_3|\cdot\left|\dfrac{z_2+z_3}{2}\right|}{2} + \dots + \frac{|z_n-z_1|\cdot\left|\dfrac{z_n+z_1}{2}\right|}{2}\\ &= -\frac{\left|z_1^2-z_2^2\right|}{4} + \frac{\left|z_2^2-z_3^2\right|}{4} + \dots + \frac{\left|z_n^2-z_1^2\right|}{4},\end{aligned}$$

adică am obţinut relaţia pentru $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n) = (-1,1,1,\dots,1)$. Celelalte relaţii se obţin analog. Reciproca se obţine imediat folosind metoda reducerii la absurd şi cele demonstrate la punctele (i) şi (ii).