GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Fondată în anul 1895

Anul CXXIII nr. 10 **octombrie 2018**

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

ASUPRA UNOR INEGALITĂŢI INTEGRALE

Cornel Pintea[1)] şi Radu Pop[2)]

Abstract. This article proves an integral inequality for a function f of class C^2, which fulfils also the condition $f(0) = f(1)$

Keywords: twice differentiable function, integral inequality, convergent series

MSC: 26A06

În această notă prezentăm două inegalităţi integrale echivalente şi o aplicaţie în care arătăm convergenţa unor serii cu termeni integrali.

Inegalitatea integrală 1. *Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă având a doua derivată continuă pe intervalul $[0,1]$. Dacă $f(0) = f(1)$, atunci pentru orice $m \geq 1$ are loc inegalitatea*

$$\left|\int_0^1 x^m f'(x)\mathrm{d}x\right| \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{m}{m+1}\frac{1}{\sqrt{(m+3)(2m+3)}}\left(\int_0^1 (f''(x))^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}. \quad (1)$$

Demonstraţie. Observăm mai întâi că

$$f'(1) = \int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x.$$

Într-adevăr

$$0 = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = xf'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x = f'(1) - \int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x.$$

Folosind formula integrării prin părţi şi inegalitatea *Cauchy-Schwarz* obţinem

[1)] Universitatea „Babeş-Bolyai“, Facultatea de Matematică-Informatică, Cluj-Napoca, e-mail: cpintea@math.ubbcluj.ro

[2)] Prof. Liceul Teoretic Sanitar, Baia-Mare, e-mail: pop_radu26@yahoo.com

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 x^m f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\frac{x^{m+1}}{m+1}f'(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}f''(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \\
&= \left(\frac{f'(1)}{m+1} - \frac{1}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}f''(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \\
&= \frac{1}{(m+1)^2}\left(f'(1) - \int_0^1 x^{m+1}f''(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \\
&= \frac{1}{(m+1)^2}\left(\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 x^{m+1}f''(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \\
&= \frac{1}{(m+1)^2}\left(\int_0^1 (x-x^{m+1})f''(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{(m+1)^2}\left(\int_0^1 (x-x^{m+1})^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 (f''(x))^2\mathrm{d}x\right) = \\
&= \frac{1}{(m+1)^2}\left(\int_0^1 (x^2-2x^{m+2}+x^{2m+2})\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 (f''(x))^2\mathrm{d}x\right) = \\
&= \frac{1}{(m+1)^2}\left(\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^{m+3}}{m+3} + \frac{x^{2m+3}}{2m+3}\right)\Bigg|_0^1 \cdot \left(\int_0^1 (f''(x))^2\mathrm{d}x\right) = \\
&= \frac{2}{3}\frac{m^2}{(m+1)^2}\cdot\frac{1}{(m+3)(2m+3)}\int_0^1 (f''(x))^2\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

de unde rezultă inegalitatea (1) din enunţ. □

Pentru $m = 1$ inegalitatea (1) este problema 26843 din Gazeta Matematică - seria B nr. 11/2013.

O formă echivalentă a inegalităţii integrale (1) este:

Inegalitatea integrală 2. *Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă având a doua derivată continuă pe intervalul $[0,1]$. Dacă $f(0) = f(1)$, atunci pentru orice $m \geq 1$ are loc inegalitatea:*

$$\left|\sum_{n=1}^{m}\int_0^1 x^n(1-x)f''(x)\mathrm{d}x\right| \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{m}{\sqrt{(m+3)(2m+3)}}\left(\int_0^1 \left(f''(x)\right)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}. \tag{2}$$

Demonstraţie. Inegalitatea (1) este echivalentă cu

$$\left|\int_0^1 (m+1)x^m f'(x)\mathrm{d}x\right| \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{m}{\sqrt{(m+3)(2m+3)}}\left(\int_0^1 (f''(x))^2\mathrm{d}x\right)^{1/2},$$

iar pentru membrul său stâng avem succesiv:

$$\left|\int_0^1 (m+1)x^m f'(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^1 (x^{m+1})'f'(x)\mathrm{d}x\right| =$$

$$= \left|x^{m+1}f'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x^{m+1}f''(x)\mathrm{d}x\right| = \left|f'(1) - \int_0^1 x^{m+1}f''(x)\mathrm{d}x\right| =$$

$$= \left| \int_0^1 x f''(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 x^{m+1} f''(x)\mathrm{d}x \right| = \left| \int_0^1 (x - x^{m+1}) f''(x)\mathrm{d}x \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 x(1-x^m) f''(x)\mathrm{d}x \right| = \left| \int_0^1 x(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-1}) f''(x)\mathrm{d}x \right| =$$

$$= \left| \sum_{n=1}^{m} \int_0^1 x^n (1-x) f''(x)\mathrm{d}x \right|.$$

Aşadar,

$$\left| \sum_{n=1}^{m} \int_0^1 x^n (1-x) f''(x)\mathrm{d}x \right| \le \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{m}{\sqrt{(m+3)(2m+3)}} \left(\int_0^1 (f''(x))^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} . \square$$

Inegalităţile integrale (1) şi (2) pot fi reformulate astfel:

Inegalitatea integrală (1) **reformulată**. *Fie* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *o funcţie derivabilă având derivata continuă pe intervalul* $[0,1]$. *Dacă* $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 0$, *atunci pentru orice* $m \ge 1$ *are loc inegalitatea*

$$\left| \int_0^1 x^m g(x)\mathrm{d}x \right| \le \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{m}{m+1} \frac{1}{\sqrt{(m+3)(2m+3)}} \left(\int_0^1 (g'(x))^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} . \quad (3)$$

Aceasta poate fi obţinută aplicând inegalitatea (1) funcţiei

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t.$$

Inegalitatea integrală (2) **reformulată.** *Dacă* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă, atunci pentru orice* $m \ge 1$ *are loc inegalitatea:*

$$\left| \sum_{n=1}^{m} \int_0^1 x^n (1-x) g(x)\mathrm{d}x \right| \le \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{m}{\sqrt{(m+3)(2m+3)}} \left(\int_0^1 (g(x))^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} . \quad (4)$$

Aceasta poate fi obţinută aplicând inegalitatea (2) funcţiei

$$F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x \left(\int_0^y g(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y - x \left[\int_0^1 \left(\int_0^y g(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y \right] + c,$$

unde $c \in \mathbb{R}$ este o constantă. Observăm că F este de două ori derivabilă, $F'' = g$ este continuă prin ipoteză şi $F(0) = F(1) = c$.

Aplicaţie. *Dacă* $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă, atunci, pentru orice* $k \ge 1$, *seria*

$$\sum_{n=1}^{m} \int_0^1 x^n (1-x)^k h(x)\mathrm{d}x \quad (5)$$

este convergentă[1)] *şi*

$$|S_k(h)| \leq S_k(|h|) \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\|h\|_{L^2([0,1])}, \tag{6}$$

unde $S_k(h)$ *este suma seriei* (5) *şi* $\|h\|_{L^2([0,1])} := \left(\int_0^1 (h(x))^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$. *Mai mult, şirul cu termeni nenegativi* $(S_k(|h|))_{k\geq 1}$ *este descrescător şi deci convergent.*

Demonstraţie. Pentru a demonstra convergenţa seriei (5) vom demonstra absolut convergenţa sa. Aplicând inegalitatea (2) funcţiei continue

$$g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = (1-x)^{k-1}|h(x)|$$

obţinem

$$\left|\sum_{n=1}^{m}\int_0^1 x^n(1-x)^k|h(x)|\mathrm{d}x\right| \leq \sqrt{\frac{2m}{3(m+3)(2m+3)}}\Big(\int_0^1 (1-x)^{2k-2}(h(x))^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Pe de altă parte

$$\frac{m}{\sqrt{(m+3)(2m+3)}} < 1,\ \forall\, m \geq 1$$

şi

$$\left(\int_0^1 (1-x)^{2k-2}(h(x))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|h\|_{L^2([0,1])}.$$

Aşadar

$$\sum_{n=1}^{m}\left|\int_0^1 x^n(1-x)^k h(x)\mathrm{d}x\right| \leq \sum_{n=1}^{m}\int_0^1 x^n(1-x)^n|h(x)|\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{m}\int_0^1 x^n(1-x)^n|h(x)|\mathrm{d}x\right| \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\|h\|_{L^2([0,1])},$$

fapt care arată că seria (5) este într-adevăr absolut convergentă şi deci convergentă. Trecând la limită în inegalităţile

$$\left|\sum_{n=1}^{m}\int_0^1 x^n(1-x)^k h(x)\mathrm{d}x\right| \leq \sum_{n=1}^{m}\int_0^1 x^n(1-x)^k|h(x)|\mathrm{d}x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\|h\|_{L^2([0,1])},$$

deducem

$$|S_k(h)| \leq S_k(|h|) \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\|h\|_{L^2([0,1])},$$

adică inegalităţile (6) sunt complet demonstrate.

[1)] Spunem că seria $\sum_{n=1}^{m} a_n$ este convergentă, dacă există şi este finită limita $S = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} a_n$, care se numeşte suma seriei şi se notează $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (N.R.)

În sfârşit, monotonia descrescătoare a şirului $(S_k(|h|))_{k\geq 1}$ rezultă folosind inegalităţile

$$x^n(1-x)^{k+1}|h(x)| \leq x^n(1-x)^k|h(x)|,$$

care sunt evidente pentru orice $n, k \geq 1$ şi $x \in [0,1]$.