EXAMENE ŞI CONCURSURI

A 58–A OLIMPIADĂ INTERNAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

prezentare de Mihail Bălună[1], Cătălin Gherghe[2] şi Radu Gologan[3]

În perioada 12–23 iulie 2017 s-a desfăşurat la Rio de Janeiro cea de-a 57–a Olimpiadă Internaţională de Matematică.

România a fost reprezentată de o echipă formată din elevii *Ciprian Mircea Bonciocat*, clasa a XI-a, *Mihnea Andrei Ocian*, clasa a XI-a şi *Alexandra Timofte*, clasa a IX-a, Colegiul Naţional de Informatică „Tudor Vianu" – Bucureşti, *Filip Alexandru Ion*, clasa a XII-a, Colegiul Naţional „Mihai Viteazul" – Bucureşti, precum şi *Mihnea Gabriel Doica*, clasa a XI-a şi *Ştefan Rareş Tudose*, clasa a XII-a, Liceul Teoretic Internaţional de Informatică – Bucureşti.

Rezultatul elevilor români poate fi considerat acceptabil, chiar dacă este modest în comparaţie cu anii anteriori: *Filip*, *Mihnea-Gabriel* şi *Ştefan-Rareş* au obţinut medalii de argint, *Ciprian* şi *Mihnea-Andrei* au câştigat bronz, *Alexandra* a luat menţiune, iar în clasamentul (neoficial) pe ţări România a ocupat locul 22.

---

[1] Profesor, Colegiul Naţional „Mihai Viteazul", Bucureşti.
[2] Conf. univ. dr., Universitatea Bucureşti.
[3] Prof. univ. dr., Universitatea Politehnică Bucureşti.

Delegaţia României

Din cei 615 de participanţi din 111 ţări, 48 au luat medalie de aur (cu un scor de cel puţin 25 puncte), 90 au luat medalie de argint (cu un scor între 19 şi 24 puncte), iar 153 au luat medalie de bronz (cu un scor între 16 şi 18 puncte). Scorul maxim, de 35 puncte din 42 posibile, a fost obţinut de 3 participanţi.

Problema 1. Pentru orice număr natural $a_0 > 1$ definim şirul a_0, a_1, a_2, ... prin:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{dacă } \sqrt{a_n} \text{ este întreg} \\ a_n + 3, & \text{în caz contrar} \end{cases}, \quad \text{pentru orice } n \geqslant 0.$$

Determinaţi toate valorile lui a_0 pentru care există un număr A astfel încât $a_n = A$ pentru o infinitate de valori ale lui n.

Soluţie. Vom arăta că răspunsul este $a_0 \equiv 0 \pmod 3$.

I. Dacă $a_0 = 3$, 6 sau 9 atunci se verifică imediat că şirul are doar termenii 3, 6 şi 9. Dacă $a_0 \equiv 0 \pmod 3$ şi $a_0 > 9$, atunci

(i) dacă a_0 este pătrat perfect, atunci $a_1 < \sqrt{a_0} < a_0$ şi $a_1 \equiv 0 \pmod 3$;

(ii) dacă a_0 nu este pătrat perfect, atunci $k^2 < a_0 < (k+1)^2$ pentru un anumit $k \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1 = a_0 + 3$, $a_2 = a_0 + 6$, ... Cum $a_0 \equiv a_1 \equiv a_2 \equiv \ldots \pmod 3$, această relaţie rămâne valabilă până când ajungem la un termen pătrat perfect: $a_{n-1} = p^2$, cu $p \equiv 0 \pmod 3$. Deoarece unul dintre numerele $k+1$, $k+2$ sau $k+3$ este $\equiv 0 \pmod 3$, avem $p \leq k+3$, apoi $a_n = p$. Din $k+3 < k^2$ pentru $k > 2$, deducem $a_n < a_0$ şi $a_n \equiv a_0 \pmod 3$. Aşadar, dacă $a_0 > 9$ şi $a_0 \equiv 0 \pmod 3$, vom obţine un termen a_{n_1} cu $a_{n_1} < a_0$ şi $a_{n_1} \equiv 0 \pmod 3$, apoi (dacă $a_{n_1} > 9$) un termen a_{n_2} cu $a_{n_2} < a_{n_1}$ şi $a_{n_2} \equiv 0 \pmod 3$, etc. Aceasta continuă până când obţinem un termen a_n cu $a_n \leq 9$ şi $a_n \equiv 0 \pmod 3$ şi ajungem la situaţia (i).

II. Dacă un termen a_n (în particular, a_0) este $\equiv 2 \pmod 3$, atunci el nu poate fi pătrat perfect, $a_{n+1} = a_n + 3 \equiv 2 \pmod 3$ şi, inductiv, $a_{n+m} = a_n + 3m \equiv 2 \pmod 3$, deci şirul nu convine în acest caz.

III. Dacă $a_0 \equiv 1 \pmod 3$, atunci ajungem, în cele din urmă, la cazul II. Într-adevăr, dacă $a_0 = 4$, atunci $a_1 = 2 \equiv 2 \pmod 3$, dacă $a_1 = 7$ atunci şirul continuă 10, 13, 16, 4, 2, iar în cazul $k^2 < a_0 \leq (k+1)^2$, $k \geq 3$, şirul continuă $a_0 + 3, a_0 + 6, \ldots$, până la un termen $a_{n-1} \not\equiv 0 \pmod 3$ egal cu un pătrat perfect care este cel mult $(k+3)^2$, apoi avem $a_n \leq k + 3 < k^2$. Obţinem astfel un termen $a_{n_1} < a_0$, cu $a_{n_1} \not\equiv 0 \pmod 3$. Aşadar, dacă ar exista un termen $A > 9$, $A \equiv 1 \pmod 3$ care să apară de o infinitate de ori, atunci am obţine o infinitate de termeni $a_{n_1} > a_{n_2} > \ldots$ – imposibil.

Toţi elevii noştri au dat soluţii asemănătoare cu cea de mai sus şi au primit nota maximă, echipa obţinând un total de 42 de puncte.

Problema 2. Fie $\mathbb{R}$ mulţimea numerelor reale. Determinaţi toate funcţiile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice numere reale x şi y,

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

Soluţie. Vom prezenta o soluţie asemănătoare cu cea dată în concurs de *Mihnea-Gabriel Doica*. Vom arăta că singurele funcţii care verifică cerinţa sunt $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 1 - x$ şi $f_3(x) = x - 1$. Se verifică uşor că acestea sunt soluţii ale problemei.

Pentru a uşura explicaţiile vom nota cu $P(x, y)$ propoziţia

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dacă $f(0) = 0$, atunci $P(x, 0)$ implică $f(0) + f(x) = f(0)$, de unde obţinem $f(x) = 0$ pentru $x \in \mathbb{R}$.

Presupunem că $f(0) \neq 0$. Să observăm că dacă există un $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(t) = 0$ atunci $t = 1$. Într-adevăr, dacă $t \neq 1$ atunci din $P\left(t, \dfrac{t}{t-1}\right)$ obţinem $f(0) + f\left(t + \dfrac{t}{t-1}\right) = f\left(t \cdot \dfrac{t}{t-1}\right)$, adică $f(0) = 0$, contradicţie. Rezultă că $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Să remarcăm că cele două valori folosite mai înainte în $P(\cdot, \cdot)$ se găsesc uşor din condiţia ca $x + y = xy$. Pe de altă parte, există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(t) = 0$, fapt ce rezultă uşor din $P(0, 0)$. Obţinem astfel că $f(f^2(0)) = 0$ şi deci, din proprietatea de mai sus, avem că $f(0) = \pm 1$.

Observăm că, dacă f este soluţie a problemei, atunci şi $-f$ este soluţie şi, deci, va fi suficient să tratăm doar cazul $f(0) = 1$.

Dacă reuşim să arătăm că f este injectivă, rezultă uşor că $f(x) = 1 - x$. Într-adevăr, din $P(x, 0)$ rezultă $f(f(x)) + f(x) = 1$. Înlocuind pe x cu $f(x)$ obţinem $f(f(f(x))) + f(f(x)) = 1$. Scăzând cele două egalităţi obţinem $f(f(f(x))) = f(x)$ iar din injectivitate rezultă $f(f(x)) = x$. Revenind în prima egalitate, obţinem $f(x) = 1 - x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Partea mai dificilă a problemei este demonstrarea injectivităţii.

Din $P(x, 1)$ rezultă $f(x+1) = f(x) - 1$. Folosind o inducţie simplă, se arată că $f(x+n) = f(x) - n$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{Z}$. De aici rezultă că dacă $f(t) = n \in \mathbb{Z}$, atunci $f(t+n) = 0$ şi deci $t = 1 - n$. În particular, $f(n) = 1 - n$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$.

Dacă notăm cu $s = x + y$ şi cu $p = xy$, vom arăta că $f(p - 2s) = f(p) - 2f(s) + 2$.

Fie $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ fixat. Din $P\left(x, \dfrac{x}{x-1}\right)$ obţinem $f(x) f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = 1$ iar din $P\left(x, \dfrac{x-2}{x-1}\right)$, deoarece $f\left(\dfrac{x^2-2x}{x-1}\right) = f\left(\dfrac{x^2-2}{x-1} - 2\right) = f\left(\dfrac{x^2-2}{x-1}\right) + 2$, obţinem $f(x) f\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right) = 1 - 2 = -1$. Deoarece $f(x) \neq 0$ rezultă că $f\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right) = -f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ şi deci $f\left(-\dfrac{1}{x-1}\right) - 1 = -f\left(\dfrac{1}{x-1}\right) + 1$. Deoarece $t = \dfrac{1}{x-1}$ ia toate valorile reale nenule, obţinem $f(-t) = -f(t) + 2$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Punând $t = x - 2$ obţinem $f(x) = -f(2 - x)$. Putem demonstra acum egalitatea de mai sus:

$$\begin{aligned} f(p-2s) &= f((2-x)(2-y) - 4) = f((2-x)(2-y)) + 4 = \\ &= f(f(2-x)f(2-y)) + f(4-s) + 4 = f(f(x)f(y)) + f(4-s) + 4 = \\ &= f(p) - f(s) + f(2 + (2-s)) + 4 = f(p) - 2f(s) + 2. \end{aligned}$$

Demonstrăm acum injectivitatea lui f. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(a) = f(b)$. Este clar că există $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ astfel ca $a = p_1 = x_1 y_1$, $b = p_2 = x_2 y_2$ şi $s_1 = x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = s_2$ (este suficient să ne gândim la intersecţia dintre elipsele de ecuaţii $xy = a$ şi $xy = b$ cu drepte paralele cu dreapta de ecuaţie $x + y = 0$). Folosind intrepretarea geometrică de mai înainte, deoarece $|s_1|$ poate fi oricât de mare, putem presupune că $p_1 - 2s_1 \in \mathbb{Z}$. Deoarece $f(p_1) = f(p_2)$ şi $f(s_1) = f(s_2)$ rezultă, folosind formula demonstrată mai înainte, că $f(p_1 - 2s_1) = f(p_1) - 2f(s_1) + 2 = f(p_2) - 2f(s_2) + 2 = f(p_2 - 2s_2)$. Pe de altă parte, deoarece $p_1 - 2s_1 \in \mathbb{Z}$ rezultă că $f(p_1 - 2s_1) = n \in \mathbb{Z}$ şi deci $f(p_2 - 2s_2) = n \in \mathbb{Z}$ de unde obţinem că $p_1 - 2s_1 = p_2 - 2s_2 = 1 - n$ şi deci $a = p_1 = p_2 = b$. Cu aceasta problema este complet rezolvată.

Echipa noastră a obţinut un total de 17 puncte la această problemă, *Mihnea-Gabriel* fiind singurul care a rezolvat-o complet, iar ceilalţi elevi (cu excepţia lui *Filip*) au obţinut puncte pentru rezultate parţiale. *Ciprian* a avut ideea de arăta că imaginea lui f este un subcorp al lui $\mathbb{R}$, dar nu a putut finaliza soluţia. Ţinând seama că problema 3 a fost deosebit de dificilă, practic această problemă a „stabilit” medaliile de argint.

Problema 3. Un vânător şi un iepure invizibil joacă un joc în planul euclidian. Punctul de pornire al iepurelui, A_0, şi punctul de pornire al vânătorului, B_0, coincid. După $n-1$ runde ale jocului, iepurele se află în punctul A_{n-1} şi vânătorul se află în punctul B_{n-1}. În a n-a rundă a jocului se întâmplă, în ordine, următoarele:

(i) fără să fie văzut, iepurele se deplasează într-un punct A_n, astfel încât distanţa dintre A_{n-1} şi A_n să fie exact 1;

(ii) un dispozitiv de urmărire îi indică vânătorului un punct P_n. Singura informaţie pe care dispozitivul i-o dă vânătorului este aceea că distanţa de la P_n la A_n este mai mică sau egală cu 1;

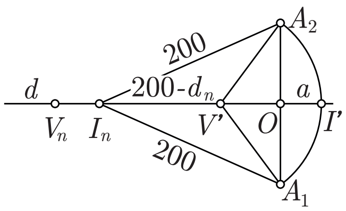
(iii) vânătorul se deplasează într-un punct B_n, vizibil, astfel încât distanţa de la B_{n-1} la B_n este exact 1.

Este totdeauna posibil ca, indiferent de felul în care se deplasează iepurele şi indiferent de punctele indicate de dispozitiv, vânătorul să-şi aleagă mişcările astfel încât după 10^9 runde să fie sigur că distanţa dintre el şi iepure este mai mică sau egală cu 100?

Soluţie. Vom arăta că răspunsul este negativ.

Pentru aceasta, notăm cu d_n distanţa dintre vânător şi iepure după n paşi. Evident, dacă $d_n \geq 100$ pentru un anumit $n < 10^9$, iepurele câştigă, deoarece atunci iepurele se va deplasa păstrând distanţa faţă de vânător.

Vom arăta că dacă pentru un n avem $d_n < 100$ atunci iepurele are o strategie ca $d_{n+200}^2 > d_n^2 + \dfrac{1}{2}$. Astfel, d_n^2 va ajunge la 10^4 în mai puţin de $2 \cdot 10^4 \cdot 200 < 10^9$ paşi.



În figura alăturată, vânătorul şi iepurele se află pe dreapta d în V_n respectiv I_n. Fără a restrânge generalitatea, putem considera că în acest moment, uitând de radar, vânătorul ştie poziţia iepurelui. Fie A_1 şi A_2 punctele simetrice faţă de d aflate la distanţă 1 de dreaptă şi distanţă 200 faţă de I_n. Strategia pe care o foloseşte iepurele va fi de a alege unul din punctele A_1 sau A_2 şi să se deplaseze timp de 200 de etape în acea direcţie. E clar atunci că vânătorul nu poate deduce spre care dintre cele două puncte se îndreaptă iepurele.

Rezultă că cea mai bună strategie a vânătorului este să se deplaseze pe d până în punctul V', pentru că orice altă direcţie ar alege ar ajunge la un punct mai îndepărtat de A_1 sau A_2. Aceasta înseamnă că în orice moment vânătorul, independent de strategie, nu poate fi sigur că va fi la distanţă mai mică decât $x = I'A_1 = I'A_2$ în aceste 200 de etape.

Din figură avem $x^2 = 1 + V'O^2 = 1 + (d_n - a)^2$ cu

$$a = 200 - I_nO = 200 - \sqrt{200^2 - 1} > \frac{1}{400}.$$

Cum din triunghiul dreptunghic I_nOA_1 avem $a^2 + 1 = 400a$ deducem

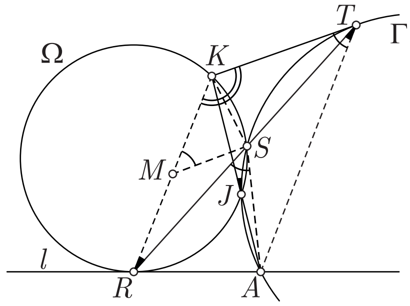
$$x^2 = d_n^2 - 2ad_n + a^2 + 1 = d_n^2 + a(400 - 2d_n) > d_n^2 + \frac{1}{2},$$

deoarece am presupus $d_n < 100$ şi am arătat că $a > \dfrac{1}{400}$. Aceasta încheie demonstraţia.

Din păcate, niciunul dintre elevii români nu a atacat problema cu argumente care să poată duce la soluţie.

Problema 4. Fie R şi S puncte diferite pe un cerc Ω, care nu sunt diametral opuse. Fie ℓ tangenta la Ω în R. Punctul T este simetricul lui R faţă de S. Punctul J este ales pe arcul mic RS al lui Ω, astfel încât cercul Γ circumscris triunghiului JST intersectează ℓ în două puncte distincte. Fie A punctul de intersecţie dintre Γ şi ℓ, cel mai apropiat de R. Dreapta AJ intersectează din nou Ω în K.

Demonstraţi că dreapta KT este tangentă la Γ.



Soluţie. Prezentăm soluţia *Alexandrei*, care foloseşte simplu particularităţile configuraţiei.

Începem prin a observa că $RK \parallel AT$: $\sphericalangle AKR = \sphericalangle JSR = \sphericalangle JAT$.

Apoi $\triangle ATR \sim \triangle SRK$: $\sphericalangle KRS = \sphericalangle KJS = 180^\circ - \sphericalangle AJS = \sphericalangle ATS$ şi $\sphericalangle TRA = \dfrac{1}{2}\widehat{RJS} = \sphericalangle RKS$.

Fie M mijlocul segmentului RK. Atunci $SM \parallel TK$ şi, deoarece AS şi SM sunt mediane în triunghiurile asemenea ATR şi SMK, $\triangle ASR \sim$ $\sim \sphericalangle SMK$. Deducem $\sphericalangle ASR = \sphericalangle SMK = 180^\circ - \sphericalangle MKT = \sphericalangle ATK$. Pe de altă parte, $\sphericalangle ASR = 180^\circ - \sphericalangle AST = \dfrac{1}{2}\widehat{AST}$, de unde $\sphericalangle ATK = \dfrac{1}{2}\widehat{AST}$, ceea ce arată că TK este tangentă la Γ.

Ceilalţi elevi ai noştri (cu excepţia lui *Ciprian*, care a rezolvat problema analitic) au dat soluţii asemănătoare, folosind însă argumente mai „tehnice"; toţi reprezentanţii noştri au obţinut scorul maxim.

Problema 5. Se consideră un număr natural $N \geqslant 2$. Un număr de $N(N+1)$ fotbalişti, oricare doi de înălţimi diferite, stau într-un rând. Antrenorul vrea să elimine $N(N-1)$ jucători din acest rând, astfel încât în noul rând de $2N$ jucători să fie îndeplinite următoarele N condiţii:

(1) nu se află nimeni între cei mai înalţi doi jucători;
(2) nu se află nimeni între al treilea şi al patrulea cei mai înalţi jucători;

$\vdots$

(N) nu se află nimeni între cei mai scunzi doi jucători.

Arătaţi că acest lucru este totdeauna posibil.

Soluţie. Vom prezenta soluţia dată în concurs de *Filip*. Împărţim cei $N(N+1)$ fotbalişti în N echipe de câte $N+1$ persoane astfel încât în prima echipă se află cei mai scunzi $N+1$ jucători, în a doua echipă se află următorii cei mai scunzi $N+1$ jucători, şi tot aşa, în a N-a echipă echipă se află cei mai înalţi $N+1$ jucători. Vom arăta că este posibil să eliminăm $N(N-1)$ jucători astfel încât în fiecare echipă rămân exact 2 jucători şi oricare dintre jucătorii rămaşi are un vecin din aceeaşi echipă, şi deci condiţia cerută de problemă este satisfăcută.

Acest lucru se realizează astfel: „scanăm" pe rând jucătorii din şir, începând cu cel mai din stânga. Ne oprim când am scanat prima dată doi jucători din aceeaşi echipă. Eliminăm acum toţi jucătorii scanaţi, cu excepţia celor doi din aceeaşi echipă. Eliminăm şi pe ceilalţi $N+1-2=N-1$ jucători din aceeaşi echipă cu cei doi păstraţi. Este clar că am eliminat cel mult câte un jucător din celelalte echipe. După această primă scanare, dacă există echipe fără jucători elimininaţi, vom elimina la întâmplare câte un jucător din aceste echipe. Am rămas astfel cu $N-1$ echipe cu câte N jucători şi continuăm scanarea inductiv. La ultimul pas vom avea 2 echipe cu câte 3 jucători şi putem aplica acelaşi procedeu.

Echipa noastră a obţinut un total de doar 9 puncte la această problemă, *Filip* fiind singurul care a rezolvat-o. Şi *Mihnea Ocian* a avut ideea de a împărţi cei $N(N+1)$ fotbalişti în N echipe de câte $N+1$ dar nu a făcut o „scanare" corectă, obţinând celelalte două puncte ale echipei.

Problema 6. O pereche ordonată (x, y) de numere întregi este un *punct primitiv* dacă cel mai mare divizor comun al numerelor x şi y este 1. Dându-se o mulţime finită S de puncte primitive, demonstraţi că există un număr natural $n \geq 1$ şi numerele întregi a_0, a_1, $\ldots$, a_n astfel încât, pentru orice (x, y) din S,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Soluţie. Notând cu $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ cele n puncte laticiale, coordonatele fiind prime între ele şi presupunând, fără a restrânge generalitatea, că oricare două nu sunt coliniare cu originea axelor, vom proceda prin inducţie după n.

Pentru $n = 1$, fie $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $ax_1 + by_1 = 1$. Prin urmare, polinomul omogen $f(x, y) = ax + by$ satisface rezultatul.

Presupunem acum că pentru $n \geq 2$ şi un şir de puncte ca în presupunerea de mai sus există un polinom omogen g de grad j cu proprietatea $g(x_1, y_1) = \ldots = g(x_{n-1}, y_{n-1}) = 1$ şi fie

$$g_n(x,y) = \prod_{k=1}^{n-1} (y_k x - x_k y),$$

şi $a_n = g_b(x_n, y_n)$. Cu presupunerea făcută la început avem $a_n \neq 0$. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $ax_n + by_n = 1$. Vom căuta pentru cazul n o soluţie de forma

$$f(x,y) = g(x,y)^A - Bg_n(x,y)(ax+by)^C,$$

unde A, C sunt numere naturale nenule iar B este întreg. Omogenitatea impune relaţia $Aj = C + n - 1$.

Proprietatea pentru punctele $(x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ este evident satisfăcută oricare ar fi alegerea constantelor precedente. Cum

$$f(x_n, y_n) = g(x_n, y_n)^A - Bg_n(x_n, y_n)(ax_n + by_n)^C = g(x_n, y_n)^A - Ba_n,$$

va trebui găsit un exponent A astfel încât $g(x_n, y_n)^A \equiv 1 (\text{mod } a_n)$ şi apoi ales B ca $f(x_n, y_n) = 1$.

Fie pentru aceasta p un divizor prim al lui a_n. Cum $p \mid a_n$, există $k \in$ $\in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ astfel ca $x_k y_n - x_n y_k \equiv 0 \pmod p$. Din alegerea punctelor laticiale ca având componente prime între ele, rezultă uşor că unul dintre numerele $x_k x_n$ şi $y_k y_n$ este prim cu p. Vom avea congruenţele modulo p

$$x_k^j g(x_n, y_n) = g(x_k x_n, x_k y_n) \equiv g(x_k x_n, y_k x_n) = x_n^j g(x_k, y_k) = x_n^j,$$

şi

$$y_k^j g(x_n, y_n) = g(y_k x_n, y_k y_n) \equiv g(x_k y_n, y_k y_n) = y_n^j g(x_k, y_k) = y_n^j.$$

Dacă $p \not| \, x_k x_n$ alegem a ca fiind $p-1$. Dacă $p \not| \, x_k x_n$ folosim prima relaţie, iar dacă nu, pe a doua, pentru a deduce $g(x_n, y_n)^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Cele de mai sus arată că, în general, alegând $A = n\varphi(a_n)$, problema este rezolvată.

La acestă problemă *Filip* a obţinut 3 puncte pentru un raţionament ce putea duce la final, iar *Ciprian* şi *Rareş* câte un punct pentru că au pus în evidenţă polinomul g_n.