GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Fondată în anul 1895

Anul CXXII nr. 4 **aprilie 2017**

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

O GENERALIZARE A INEGALITĂŢII LUI HAYASHI

Rică Zamfir[1)]

Abstract. This note extends an inequality, due to Hayashi, from a triangle to a polygon

Keywords: Hayashi inequality

MSC: 26D20

1. Introducere

În [1], pag. 20, apare enunţul inegalităţii lui *Hayashi*:

Dacă P este un punct în planul triunghiului ABC, atunci

$$\frac{PA\cdot PB}{CA\cdot CB}+\frac{PB\cdot PC}{AB\cdot AC}+\frac{PC\cdot PA}{BC\cdot BA}\geq 1.$$

Demonstraţia dată în locul citat foloseşte următoarea identitate cu numere complexe:

$$\frac{1}{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}=\frac{1}{(b-a)(c-a)}\cdot\frac{1}{p-a}+$$
$$+\frac{1}{(c-b)\,(a-b)}\cdot\frac{1}{p-b}+\frac{1}{(a-c)\,(b-c)}\cdot\frac{1}{p-c}.$$

$\square$

Este evident că această identitate poate fi extinsă, obţinând în acest fel o generalizare a inegalităţii lui *Hayashi* pentru un poligon cu n laturi. În nota de faţă, vom demonstra efectiv inegalitatea generalizată în cazul unui patrulater $ABCD$, apoi vom da o aplicaţie în cazul unui patrulater inscriptibil, iar în final vom arăta cum identitatea pentru cazul $n=4$ poate fi extinsă în cazul general.

1) Profesor dr., Colegiul Naţional de Informatică „Tudor Vianu“, Bucureşti.

Propoziţie. *Pentru orice numere complexe p, a, b, c, d distincte două câte două, avem egalitatea*

$$\frac{1}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)} \cdot \frac{1}{p-a} + \\ + \frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)} \cdot \frac{1}{p-b} + \frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)} \cdot \frac{1}{p-c} + \\ + \frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)} \cdot \frac{1}{p-d}.$$

Demonstraţie. Căutăm o descompunere în fracţii simple sub forma

$$\frac{1}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \frac{A}{p-a} + \frac{B}{p-b} + \frac{C}{p-c} + \frac{D}{p-d}. \qquad (*)$$

Pentru a afla pe A, B, C, D procedăm astfel: înmulţim relaţia $(*)$ cu $(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$, apoi dăm succesiv lui p valorile a, b, c, d. Vom găsi

$$A = \frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)}, \quad B = \frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)},$$

$$C = \frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)}, \quad D = \frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)},$$

ceea ce demonstrează Propoziţia.

2. Inegalitatea lui Hayashi pentru un patrulater

Teoremă. *Dacă P este un punct din planul patrulaterului $ABCD$, atunci*

$$\frac{PB \cdot PC \cdot PD}{AB \cdot AC \cdot AD} + \frac{PA \cdot PC \cdot PD}{BA \cdot BC \cdot BD} + \frac{PA \cdot PB \cdot PD}{CA \cdot CB \cdot CD} + \frac{PA \cdot PB \cdot PC}{DA \cdot DB \cdot DC} \geq 1.$$

Demonstraţie. Dacă P coincide cu unul dintre vârfuri, membrul stâng al inegalităţii devine egal cu 1, deci în acest caz inegalitatea se verifică, cu semnul egal.

Presupunem acum că P este diferit de vârfurile patrulaterului.

Notăm afixele punctelor P, A, B, C, D cu literele mici corespunzătoare. Înmulţim identitatea $(*)$ din Propoziţie cu $(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$ şi găsim

$$1 = \frac{(p-b)(p-c)(p-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{(p-a)(p-c)(p-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \\ + \frac{(p-a)(p-b)(p-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

Trecând la module şi utilizând inegalitatea modulului obţinem

$$1 \le \frac{|p-b|\cdot|p-c|\cdot|p-d|}{|a-b|\cdot|a-c|\cdot|a-d|} + \frac{|p-a|\cdot|p-c|\cdot|p-d|}{|b-a|\cdot|b-c|\cdot|b-d|} + \\ + \frac{|p-a|\cdot|p-b|\cdot|p-d|}{|c-a|\cdot|c-b|\cdot|c-d|} + \frac{|p-a|\cdot|p-b|\cdot|p-c|}{|d-a|\cdot|d-b|\cdot|d-c|}$$

care este chiar inegalitatea din enunţ.

3. O aplicaţie în patrulaterul inscriptibil

Considerăm acum patrulaterul $ABCD$ înscris în cercul de centru O şi rază R. Dacă luăm $P = O$, atunci $PA = PB = PC = PD = R$ şi inegalitatea lui *Hayashi* devine

$$\frac{R^3}{AB\cdot AC\cdot AD} + \frac{R^3}{AB\cdot BC\cdot BD} + \frac{R^3}{AC\cdot BC\cdot CD} + \frac{R^3}{AD\cdot BD\cdot DC} \ge 1.$$

Înmulţim ultima inegalitate cu $AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA$ şi găsim

$$\frac{BC\cdot CD}{AC} + \frac{CD\cdot AD}{BD} + \frac{AB\cdot AD}{AC} + \frac{AB\cdot BC}{BD} \ge \frac{AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA}{R^3},$$

sau altfel scris

$$\frac{AB\cdot AD + CB\cdot CD}{AC} + \frac{BA\cdot BC + DA\cdot DC}{BD} \ge \frac{AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA}{R^3},$$

care este o inegalitate interesantă.

Remarcă.[1)] Ultima inegalitate poate fi argumentată şi altfel: conform celei de-a doua relaţii a lui *Ptolemeu* avem

$$\frac{AB\cdot AD + CB\cdot CD}{AC} = \frac{BA\cdot BC + DA\cdot DC}{BD},$$

deci

$$\frac{AB\cdot AD + CB\cdot CD}{AC} + \frac{BA\cdot BC + DA\cdot DC}{BD} = 2\cdot\frac{AB\cdot AD + CB\cdot CD}{AC} \\ \ge \frac{4}{AC}\cdot\sqrt{AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA}.$$

Pentru a demonstra inegalitatea în discuţie, este suficient să arătăm că $AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA\cdot AC^2 \le 16R^6$. Această relaţie reiese din $AC \le 2R$ şi *inegalitatea izoperimetrică* $AB + BC + CD + DA \le 4l_4 = 4R\sqrt{2}$ (unde l_4 este latura pătratului înscris în cerc), combinată cu inegalitatea mediilor $4^4\cdot AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA \le (AB + BC + CD + DA)^4$.

[1)]Nota Redacţiei.

4. Inegalitatea lui Hayashi pentru un poligon

Identitatea din Propoziţie poate fi uşor generalizată astfel:

Dacă $p, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere complexe distincte două câte două atunci

$$\frac{1}{(p-a_1)(p-a_2)\ldots(p-a_n)} = \frac{A_1}{p-a_1} + \frac{A_2}{p-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{p-a_n},$$

unde

$$A_k = \frac{1}{\prod\limits_{i=1, i\neq k}^{n} (a_k - a_i)}.$$

Obţinem astfel inegalitatea lui *Hayashi* pentru un poligon:

Teoremă. *Dacă P este un punct în planul poligonului $A_1A_2\ldots A_n$, atunci*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{PA_1 \cdot PA_2 \cdot \ldots \cdot PA_{i-1} \cdot PA_{i+1} \cdot \ldots \cdot PA_n}{A_iA_1 \cdot A_iA_2 \cdot \ldots \cdot A_iA_{i-1} \cdot A_iA_{i+1} \cdot \ldots \cdot A_iA_n} \geq 1.$$

Bibliografie

[1] M. Bataille, *Inequalities via Complex Numbers*, Crux Mathematicorum, vol 42 (1), ianuarie 2016, pag 20-23.

ASUPRA UNEI IDENTITĂŢI

Gheorghe Stoica[1)]

Abstract. This note extends an elementary identity and points to some simple consequences of this extension

Keywords: polynomial identity

MSC: 08A40

Este binecunoscută următoarea proprietate:

Un triunghi ale cărui lungimi ale laturilor a, b, c verifică relaţia

$$\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} = 0$$

este isoscel.

Aceasta a fost înserată în multe culegeri de probleme şi manuale. Ea poate fi generalizată utilizând identitatea următoare:

Propoziţie. *Fie $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci*

$$\frac{a^n-b^n}{c} + \frac{b^n-c^n}{a} + \frac{c^n-a^n}{b} = -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \cdot \sum_{(i,j,k)\in A_n} a^i b^j c^k, \quad (*)$$

[1)] Profesor, Colegiul Naţional „Carmen Sylva“, Petroşani