PENTRU CERCURILE DE ELEVI

FOLOSIREA SUMELOR SIMETRICE ÎN DEMONSTRAREA UNOR INEGALITĂŢI

DUMITRU BARAC[1)]

În această lecţie prezentăm rezolvarea a două probleme referitoare la inegalităţi folosind o idee comună: considerarea sumelor simetrice alcătuite cu variabilele date, sau cu o parte dintre ele. Avantajul acestei abordări este posibilitatea de a găsi o rezolvare folosind metode elementare.

1. *Marius Stănean*, Zalău (G.M.-B nr. 6-7-8/2016) *Numerele reale a, b, c, d verifică $a+b+c+d=6$ şi $a^2+b^2+c^2+d^2=12$. Să se arate că $abcd \leq 3$.*

Soluţie. Notăm $a+b=s$, $ab=p$, deci $a,b\in\mathbb{R}$ şi $s^2\geq 4p$. Rezultă $c+d=6-s$, $c^2+d^2=12-s^2+2p$, de unde rezultă

$$cd=\frac{(c+d)^2-(c^2+d^2)}{2}=\frac{(6-s)^2-(12-s^2+2p)}{2}=$$
$$=\frac{36-12s+s^2-12+s^2-2p}{2}=12-6s+s^2-p.$$

Deoarece $c,d\in\mathbb{R}$, avem

$$2(c^2+d^2)\geq(c+d)^2 \Leftrightarrow 24-2s^2+4p\geq 36-12s+s^2 \Leftrightarrow 4p\geq 12-12s+3s^2.$$

Trebuie maximizat $p(12-6s+s^2-p)$ când $s^2\geq 4p\geq 3(s-2)^2$. Din $s^2\geq 3(s-2)^2 \Leftrightarrow 2s^2-12s+12\leq 0 \Leftrightarrow s^2-6s+6\leq 0$ obţinem $s\in[3-\sqrt{3},3+\sqrt{3}]$. Putem presupune $a+b\leq c+d$, deci $s\leq 3$. Funcţia de gradul al doilea $f(t)=-t^2+(s^2-6s+12)t$ este crescătoare pentru $t\leq t_V$ şi descrescătoare pentru $t\geq t_V$, unde $t_V=\dfrac{s^2-6s+12}{2}$.

Considerând diferitele posibilităţi de situare a vârfului parabolei, avem cazurile

• $t_V\geq\dfrac{s^2}{4}\Leftrightarrow 2s^2-12s+24\geq s^2\Leftrightarrow s^2-12s+24\geq 0\Leftrightarrow s\leq 6-2\sqrt{3}$ sau $s\geq 6+2\sqrt{3}$. Ultima variantă fiind exclusă, $s\in[3-\sqrt{3},6-2\sqrt{3}]$.

• $\dfrac{s^2}{4}\geq t_V\geq\dfrac{3(s-2)^2}{4}$.

• $t_V\leq\dfrac{3(s-2)^2}{4}\Leftrightarrow 2s^2-12s+24\leq 3s^2-12s+12\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow s^2-12\geq 0\Leftrightarrow s\geq 2\sqrt{3},$$

deci $s\in[2\sqrt{3},3+\sqrt{3}]$, situaţie care iese din discuţie, deoarece $2\sqrt{3}>3$.

Rămân astfel doar primele două cazuri:

[1)]Profesor, Slatina

I. $s \in [3-\sqrt{3}, 6-2\sqrt{3}]$; maximul este atins pentru $p = \dfrac{s^2}{4}$ când

$$abcd = \frac{s^2}{4}\left(12-6s+s^2-\frac{s^2}{4}\right) = \frac{3s^4-24s^3+48s^2}{16} = \frac{3(4s-s^2)^2}{16};$$

deoarece $4s-s^2>0$, maximul lui $abcd$ are loc când $4s-s^2$ este maxim, deci pentru $s_M = 2$. Rezultă $p_M = 1$, deci $a_M = b_M = 1$, $c+d=4$, $cd=3$, deci $(c_M, d_M) \in \{(1,3);(3,1)\}$; $(abcd)_M = 3$.

II. $s \in [6-2\sqrt{3}, 3]$; maximul este atins pentru $p = t_V = \dfrac{s^2-6s+12}{2}$ când

$$abcd = \frac{s^2-6s+12}{2}\left(12-6s+s^2-\frac{s^2-6s+12}{2}\right) = \frac{(s^2-6s+12)^2}{4}.$$

Deoarece $s^2-6s+12>0$, maximul lui $abcd$ are loc în extremităţile intervalului unde avem $\dfrac{[(3-2\sqrt{3})^2+3]^2}{4} < 3$, după cum se verifică uşor, şi $\dfrac{9}{4} < 3$.

Aşadar, $(abcd)_M = 3$, când $s=2$, $p=1$, deci $a=b=c=1$, $d=3$. Din simetrie, mai există încă trei variante de egalitate.

2. *Ion Nedelcu*, Ploieşti (G.M.-B nr. 4/2016 - enunţ întărit)
Fie a, b, c numere reale pozitive cu suma 1. Să se arate că

$$\frac{3}{2} < \frac{9}{5} \leq \frac{a+b}{1+ab} + \frac{b+c}{1+bc} + \frac{c+a}{1+ca} \leq 2.$$

Soluţie. Notând $p = a+b+c = 1$, $q = ab+bc+ca$, $r = abc$, avem

$$\sum \frac{a+b}{1+ab} = \frac{\sum(a+b)(1+bc)(1+ca)}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)} = \frac{\sum(a+b)(1+bc+ca+abc^2)}{1+q+pr+r^2} =$$

$$= \frac{\sum(a+b) + \sum(2abc+a^2c+b^2c) + (abc)\sum(ac+bc)}{1+q+r+r^2} =$$

$$= \frac{2p+6r+pq-3r+2qr}{1+q+r+r^2} = \frac{2+q+3r+2qr}{1+q+r+r^2}.$$

A doua inegalitate devine

$$\frac{2+q+3r+2qr}{1+q+r+r^2} \leq 2 \Leftrightarrow 2+q+3r+2qr \leq 2+2q+2r+2r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2r^2-2qr+q-r \geq 0 \Leftrightarrow (q-r)(1-2r) \geq 0.$$

Însă,

$$q-r = (pq-9r)+8r \geq 0 \text{ şi } 1-2r = (p^3-27r)+25r \geq 0.$$

Egalitate avem când $r=0$, $q=0$, deci când $a=1$, $b=c=0$ şi analoagele.

Prima inegalitate din enunţul original devine

$$\frac{3}{2} \leq \frac{2+q+3r+2qr}{1+q+r+r^2} \Leftrightarrow 3+3q+3r+3r^2 \leq 4+2q+6r+4qr \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1-q+3r+4qr-3r^2 \geq 0.$$

Însă,

$$1-q+3r+4qr-3r^2 = (p^2-3q)+2q+3r+4r(pq-9r)+33r^2 \geq 0.$$

În acest caz egalitatea nu poate fi atinsă.

Prima inegalitate întărită devine

$$\frac{9}{5} \leq \frac{2+q+3r+2qr}{1+q+r+r^2},$$

care se scrie

$$9+9q+9r+9r^2 \leq 10+5q+15r+10qr \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1-4q+6r+10qr-9r^2 \geq 0 \Leftrightarrow p^6-4p^4q+6p^3r+10pqr-9r^2 \geq 0.$$

Însă, folosind inegalităţile lui *Schur*:

$$\sum a(a-b)(a-c) \geq 0 \Leftrightarrow p^3-4pq+9r \geq 0,$$
$$\sum a^2(a-b)(a-c) \geq 0 \Leftrightarrow p^4-5p^2q+6pr+4q^2 \geq 0$$

şi inegalitatea cunoscută $pq-9r \geq 0$, avem

$$p^6-4p^4q+6p^3r+10pqr-9r^2 = p^2(p^4-5p^2q+6pr+4q^2)+$$
$$+pq(p^3-4pq+9r)+r(pq-9r) \geq 0.$$

Egalitatea este atinsă pentru cazurile de egalitate a inegalităţilor lui *Schur*: $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ şi $\left(a=b=\dfrac{1}{2}, c=0\right)$ şi încă două analoage.