ASUPRA UNEI PROBLEME DE GEOMETRIE

Severius Moldoveanu[1]

Abstract. This note points to a generalization of problem 6 from the European Mathemaical Olympiad for Girls 2017

Keywords: *Steiner* point, anti-*Steiner* point, reflection across a line

MSC: 51M04

În nota de faţă ne propunem să prezentăm un rezultat mai general decât cel dintr-o problemă de geometrie propusă la a şasea ediţie a Olimpiadei Europene de Matematică pentru Fete (EGMO 2017), desfăşurată în Elveţia. Iată enunţul problemei.

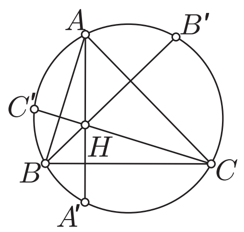
Problema 6, EGMO 2017. *Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care orice două laturi au lungimi diferite. Simetricele centrului său de greutate G şi ale centrului O al cercului său circumscris faţă de laturile BC, CA, AB sunt notate G_1, G_2, G_3 şi, respectiv, O_1, O_2, O_3. Arătaţi că cercurile circumscrise triunghiurilor G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A şi ABC au un punct comun.*

În continuare, vom enunţa şi demonstra un rezultat important, cunoscut în literatura de specialitate ca *punctul anti-Steiner* al unei drepte.

Teorema 1. *Fie o dreaptă d ce trece prin ortocentrul H al triunghiului ABC şi a', b', c' simetricele dreptei d faţă de laturile BC, CA, respectiv AB. Atunci dreptele a', b', c' sunt concurente într-un punct aflat pe cercul circumscris triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vom începe prin a enunţa un rezultat important privind ortocentrul unui triunghi.

Lemă *Simetricele A', B', C' ale ortocentrului H al triunghiului ABC faţă de laturile BC, CA respectiv AB se află pe cercul circumscris triunghiului.*



Demonstraţia lemei. Se cunoaşte că, prin simetrie faţă de o dreaptă g, o dreaptă d şi simetrica acesteia d' formează, fiecare, cu dreapta de simetrie unghiuri congruente. De asemenea, orice unghi se transformă prin simetrie faţă de o dreaptă într-un unghi congruent cu cel dat.

Astfel, $\sphericalangle BHC \equiv \sphericalangle BA'C$ (deoarece $\sphericalangle BA'C$ este simetricul lui $\sphericalangle BHC$

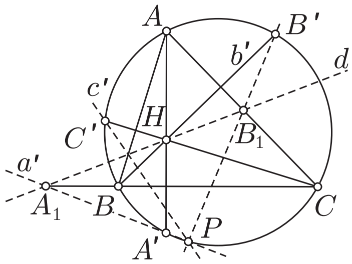
[1] Profesor dr., Colegiul Naţional de Informatică „Tudor Vianu", Bucureşti.

faţă de dreapta BC). Cum $m(\sphericalangle BHC) = 180^\circ - m(\sphericalangle A)$, $BA'CA$ este patrulater inscriptibil, deci A' se află pe cercul circumscris triunghiului ABC (pe care îl notăm cu $\mathcal{C}(ABC)$).

În mod analog punctele B' şi C' se află pe $\mathcal{C}(ABC)$. □

Conform Lemei avem $A' \in a'$, $B' \in b'$, $C' \in c'$.

Fie $\{P\} = a' \cap b'$, $\{A_1\} = a' \cap d$ şi $\{B_1\} = b' \cap d$. Atunci $m(\sphericalangle A_1A'B) = m(\sphericalangle A_1HB) = m(\sphericalangle B_1HB') = m(\sphericalangle PB'B)$, deci $BA'PB'$ este patrulater inscriptibil. Astfel, $P \in \mathcal{C}(ABC)$.



În mod analog, considerăm $\{P_1\} = a' \cap c'$ şi demonstrăm că CP_1AC' este patrulater inscriptibil, deci $P_1 \in \mathcal{C}\,(ABC)$.

Observăm că punctele P şi P_1 se află la intersecţia $\mathcal{C}\,(ABC)$ cu a' şi sunt diferite de A', de unde rezultă că $P = P_1$, deci $a' \cap b' \cap c' = \{P\} \in \mathcal{C}\,(ABC)$, ceea ce încheie demonstraţia teoremei 1. □

Punctul P astfel construit se numeşte punctul anti-*Steiner* al dreptei d.

Motivaţia denumirii pentru punct anti-*Steiner* al unei drepte este următoarea:

- Simetricele unui punct Q aflat pe cercul circumscris triunghiului ABC faţă de laturile triunghiului se află pe o dreaptă ce trece prin ortocentrul triunghiului ABC şi care se numeşte dreapta *Steiner* a punctului Q în raport cu ΔABC.
- În Enciclopedia Centrelor Triunghiului [3], punctul *Steiner* este determinat astfel: Fie L punctul *Lemoine* (punctul *Grebe*), O centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi l_a, l_b, l_c simetricele dreptei OL faţă de dreptele BC, CA, respectiv AB. Dacă $\{D\} = l_b \cap l_c$, $\{E\} = l_c \cap l_a$, $\{F\} = l_a \cap l_b$, atunci dreptele AD, BE şi CF sunt concurente, iar punctul de concurenţă se numeşte punctul lui *Steiner*.

O consecinţă a Teoremei 1 este următorul rezultat.

Teorema 2. *Fie un punct X situat pe o dreaptă d ce trece prin ortocentrul H al triunghiului ABC şi X_1, X_2, X_3 simetricele punctului X faţă de laturile BC, CA, respectiv AB. Atunci punctul anti-Steiner al dreptei d se află pe cercurile circumscrise triunghiurilor X_2AX_3, X_1BX_2 şi X_1CX_3.*

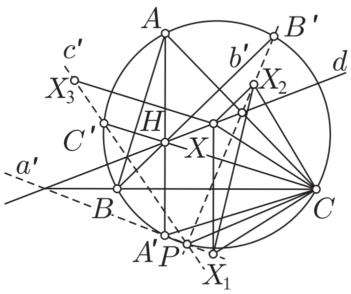
Demonstraţie. Fie P punctul anti-*Steiner* al dreptei d. Atunci

$$m(\sphericalangle X_1CX_2) = 2m(\sphericalangle BCX) + 2m(\sphericalangle XCA) = 2m(\sphericalangle BCA) \qquad (1)$$

(am ţinut cont de simetriile lui CX faţă de BC, respectiv CA) şi

$$\begin{aligned} \mathrm{m}(\sphericalangle X_1PX_2) &= \mathrm{m}(\sphericalangle A'PB') = 180^\circ - \mathrm{m}(\sphericalangle A'BB') = \\ &= 180^\circ - 2\mathrm{m}(\sphericalangle CBB') = 180^\circ - 2\big(90^\circ - \mathrm{m}(\sphericalangle BCA)\big) = 2\mathrm{m}(\sphericalangle BCA) \end{aligned} \tag{2}$$

(am ţinut cont de simetria lui BX faţă de BC).



Conform cu (1) şi (2) rezultă că X_1PX_2C este patrulater inscriptibil, deci $P \in \mathcal{C}(X_1BX_2)$.

Analog $P \in \mathcal{C}\,(X_2AX_3)$ şi $P \in \mathcal{C}\,(X_1CX_3)$. □

Rezolvarea problemei EGMO 6.

Se observă că OG este dreapta lui *Euler*, deci dreapta trece prin ortocentrul H al triunghiului ABC şi, conform Teoremei 1, putem considera punctul anti-*Steiner* P al dreptei lui *Euler*. Având în vedere Teorema 2, cercurile circumscrise triunghiurilor G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A şi ABC se intersectează în punctul P.

Bibliografie

[1] S.N. Collings, *Reflections on a triangle*, Mathematical Gazette

[2] C. Kimberly, *Encyclopedia of Triangle Centers*, http://faculty .evansville.edu/ck6/encyclopedia/

[3] https://www.egmo.org/egmos/egmo6/paper-day2-Romanian