Gyuri lasă în urmă un standard de perfecţiune greu de atins, stabilit prin exemplul său personal, iar la nivel concret, probleme elegante şi articole valoroase, scrise cu mult talent pedagogic şi care sunt menite să trezească interesul pentru matematică şi altor generaţii de copii olimpici.

Mihail Bălună

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

ASUPRA UNOR INEGALITĂŢI

MARTIN BOTTESCH[1)]

Abstract. In this paper we investigate for which values of a positive integer parameter n a certain symmetric inequality in three variables holds. We note that the same method can be used to determine the set of values of n for which holds a similar four-variable inequality.

Keywords: Symmetric inequality, Lagrange multipliers, polynomials.
MSC: 26D10

La demonstrarea inegalităţilor condiţionate cu ajutorul multiplicatorilor lui *Lagrange* rezolvarea sistemului de ecuaţii ce apare este de multe ori dificilă. Nu totdeauna este însă necesar ca sistemul să fie rezolvat complet. Un exemplu în care este suficientă cunoaşterea unei proprietăţi a soluţiilor sistemului se găseşte în [1], pg. 287. În cele ce urmează apare o situaţie asemănătoare.

Fie n un număr natural nenul. Vom studia inegalitatea

$$\frac{x}{1+x^n}+\frac{y}{1+y^n}+\frac{z}{1+z^n}\le\frac{3}{2}, \tag{1}$$

unde x, y, z sunt numere reale pozitive care satisfac condiţia $xyz = 1$.

Pentru $n = 4$ se obţine problema 27244 din GM-B, nr. 6-7-8/2016 [2].

Demonstrăm următoarea

Propoziţie. *Inegalitatea* (1) *are loc pentru orice* $x, y, z > 0$ *cu* $xyz = 1$ *dacă şi numai dacă* $n \in \{2, 3, \ldots, 11\}$.

Demonstraţia se va baza pe două leme. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x, y, z > 0$ fie

$$f_n(x,y,z)=\frac{x}{1+x^n}+\frac{y}{1+y^n}+\frac{z}{1+z^n}.$$

Notăm $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x, y, z > 0, xyz = 1\}$.

Lema 1. *Pentru orice număr natural* $n \ge 2$ *există* $(x_0, y_0, z_0) \in A$ *astfel încât* $f_n(x_0, y_0, z_0) = \max\{f_n(x, y, z) \mid (x, y, z) \in A\}$ *şi* $x_0 \le y_0 \le z_0$.

Demonstraţie. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Dacă alegem $(x, y, z) \in A$ cu $x < \dfrac{1}{9}$, atunci cel puţin una din celelalte două variabile, de exemplu z, va fi mai

1) Profesor, C. N. „Samuel von Brukenthal", Sibiu, martinbottesch@yahoo.com

mare ca 3. Atunci $\dfrac{x}{1+x^n} < \dfrac{1}{9}$, $\dfrac{z}{1+z^n} < \dfrac{1}{z} < \dfrac{1}{3}$ şi, cum $\dfrac{y}{1+y^n} < 1$, rezultă $f_n(x,y,z) < \dfrac{13}{9} < \dfrac{3}{2} = f_n(1,1,1)$. Dacă una din variabile este mai mare ca 81, atunci alta este mai mică decât $\dfrac{1}{9}$ şi se ajunge la acelaşi rezultat. Astfel, pentru orice punct $(x,y,z) \in A \setminus B$, unde $B = \left[\dfrac{1}{9}, 81\right]^3$, avem $f_n(x,y,z) < f_n(1,1,1)$. Cum mulţimea $A \cap B$ este compactă şi f_n continuă, restricţia lui f_n pe $A \cap B$ are un punct de maxim în $A \cap B$. Un punct de maxim al restricţiei este însă, în situaţia dată, totodată punct de maxim pentru f_n în A. Datorită simetriei funcţiei f_n se poate alege un punct de maxim (x_0, y_0, z_0) astfel încât $x_0 \le y_0 \le z_0$. $\square$

Lema 2. *Fie $n \ge 2$ un număr natural. Dacă $(x_0, y_0, z_0) \in A$ astfel încât $f_n(x_0, y_0, z_0) = \max\{f_n(x,y,z) \mid (x,y,z) \in A\}$ şi $x_0 \le y_0 \le z_0$, atunci $x_0 = y_0$.*

Demonstraţie. Fie $L_n = f_n - \lambda g$ funcţia lui *Lagrange*, unde $g(x,y,z) = xyz - 1$, $x,y,z > 0$, şi $\lambda \in \mathbb{R}$. Sistemul de ecuaţii ataşat (cu necunoscutele x, y, z, λ) este

$$\frac{\partial L_n}{\partial x}(x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial L_n}{\partial y}(x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial L_n}{\partial z}(x,y,z) = 0, \quad g(x,y,z) = 0.$$

Prima ecuaţie este $\dfrac{1-(n-1)x^n}{(1+x^n)^2} = \lambda yz$, unde yz poate fi înlocuit prin $\dfrac{1}{x}$. Procedând la fel cu celelalte ecuaţii, sistemul devine

$$\frac{1-(n-1)x^n}{(1+x^n)^2} = \frac{\lambda}{x}, \quad \frac{1-(n-1)y^n}{(1+y^n)^2} = \frac{\lambda}{y}, \quad \frac{1-(n-1)z^n}{(1+z^n)^2} = \frac{\lambda}{z}, \quad xyz = 1. \tag{2}$$

Întrucât funcţiile f_n şi g sunt definite pe mulţimea deschisă $D = (0,\infty)^3$ şi gradientul $\nabla g = (yz, zx, xy)$ nu este vectorul nul în niciun punct din D, pentru orice punct de extrem $(x,y,z) \in A$ al lui f_n există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât (x,y,z,λ) să fie soluţie a sistemului (2). Constatăm că într-un asemenea caz x, y, z sunt soluţii ale aceleiaşi ecuaţii (în t):

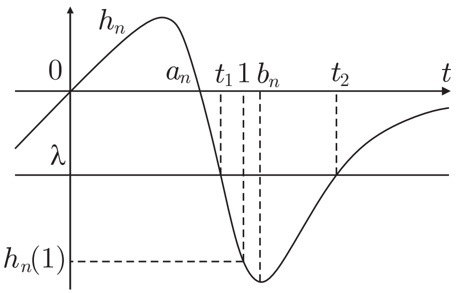
$$\frac{t-(n-1)t^{n+1}}{(1+t^n)^2} = \lambda \qquad (t > 0). \tag{3}$$

Funcţia $h_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $h_n(t) = \dfrac{t-(n-1)t^{n+1}}{(1+t^n)^2}$ are zeroul $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{1}{n-1}}$. Funcţia h_n este pozitivă pe $(0, a_n)$ şi negativă pe (a_n, ∞). Derivata ei

$$h_n'(t) = \frac{(n-1)^2 t^{2n} - (n^2+2n-2)t^n + 1}{(1+t^n)^3}$$

are în intervalul (a_n, ∞) un singur zero b_n. (Pentru a vedea aceasta înlocuim în $h'_n(t) = 0$ pe t^n cu s. Ecuaţia de gradul doi în s obţinută are soluţii reale, pozitive şi distincte, ale căror produs este $\dfrac{1}{(n-1)^2}$. De aceea, exact una dintre ele este mai mare ca $\dfrac{1}{n-1}$. Valoarea corespunzătoare a lui t este mai mare ca $\sqrt[n]{\dfrac{1}{n-1}} = a_n$.) Cum $h'_n(1) = \dfrac{1-n}{2} < 0$, avem $b_n > 1$. Pe (a_n, b_n) funcţia h_n este strict descrescătoare şi pe (b_n, ∞) strict crescătoare.

Fie (x_0, y_0, z_0) un punct de maxim al funcţiei f_n, cu $x_0 \le y_0 \le z_0$. Dacă $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ afirmaţia lemei are loc. Dacă $(x_0, y_0, z_0) \ne (1, 1, 1)$, atunci $x_0 < 1$ şi $z_0 > 1$. Cum x_0 şi z_0 sunt soluţii ale lui (3), rezultă că această ecuaţie are o soluţie $t_1 \in (0, 1)$ şi o soluţie $t_2 \in (1, \infty)$.



Din proprietăţile funcţiei h_n deducem $\lambda \in (h_n(1), 0)$, $t_1 \in (a_n, 1)$, $t_2 \in (b_n, \infty)$, iar ecuaţia (3) nu are în acest caz alte soluţii pozitive (a se vedea figura). Cum $x_0 \le y_0 \le z_0$, apar cazurile $x_0 = y_0 = t_1$, $z_0 = t_2$ şi $x_0 = t_1$, $y_0 = z_0 = t_2$. Arătăm că numai primul poate avea loc, ceea ce va încheia demonstraţia lemei.

Egalitatea $h_n(t_1) = h_n(t_2)$ se scrie

$$\frac{t_1(1-(n-1)t_1^n)}{(1+t_1^n)^2} = \frac{t_2(1-(n-1)t_2^n)}{(1+t_2^n)^2}. \tag{4}$$

Din $t_2 > 1$ rezultă $1-(n-1)t_2^n < 0$, şi cum $t_1 < t_2$, avem $t_2(1-(n-1)t_2^n) < t_1(1-(n-1)t_2^n)$. Astfel obţinem din (4)

$$\frac{t_1(1-(n-1)t_1^n)}{(1+t_1^n)^2} < \frac{t_1(1-(n-1)t_2^n)}{(1+t_2^n)^2}. \tag{5}$$

Din (5) obţinem după eliminarea numitorilor şi ordonarea după puterile lui t_2

$$((n-1)t_1^n - 1)t_2^{2n} - ((n-1)t_1^{2n} + n + 1)t_2^n + t_1^{2n} + (n+1)t_1^n > 0. \tag{6}$$

Funcţia de gradul doi

$$\varphi(u) = ((n-1)t_1^n - 1)u^2 - ((n-1)t_1^{2n} + n + 1)u + t_1^{2n} + (n+1)t_1^n$$

are coeficientul dominant pozitiv, căci $(n-1)t_1^n - 1 > (n-1)a_n^n - 1 = 0$. Zerourile funcţiei φ sunt $u_1 = t_1^n$, $u_2 = \dfrac{t_1^n + n + 1}{(n-1)t_1^n - 1}$ şi avem $u_1 < 1 < u_2$.

Acum (6) ne dă $\varphi(t_2^n) > 0$, ceea ce implică $t_2^n > u_2$, deci $t_2^n > \dfrac{t_1^n + n + 1}{(n-1)t_1^n - 1}$, iar de aici $t_1^n t_2^n > \dfrac{t_1^{2n} + (n+1)t_1^n}{(n-1)t_1^n - 1} > \dfrac{(n+1)t_1^n}{(n-1)t_1^n - 1} > 1$, adică $t_1 t_2 > 1$.

Presupunem acum că ar avea loc cazul $x_0 = t_1, y_0 = z_0 = t_2$. Din $t_1 t_2 > 1$ şi $t_2 > 1$ rezultă $t_1 t_2^2 > 1$, deci $x_0 y_0 z_0 > 1$, contradicţie. Rămâne cazul $x_0 = y_0 = t_1, z_0 = t_2$. □

Demonstraţia Propoziţiei.

1° Arătăm că dacă $n \in \{2, 3, \ldots, 11\}$, atunci inegalitatea (1) are loc pentru orice $x, y, z > 0$ cu $xyz = 1$.

Cazul $\boxed{n = 2}$ este evident, întrucât din $2x \leq 1 + x^2$ şi analoagele rezultă că fiecare fracţie are cel mult valoarea $\dfrac{1}{2}$.

Fie în continuare $n \geq 3$. Notăm cu (x_0, y_0, z_0) un punct de maxim al lui f_n în A cu $x_0 \leq y_0 \leq z_0$. Conform Lemei 2 putem înlocui pe y_0 cu x_0, deci $z_0 = \dfrac{1}{x_0^2}$. Din demonstraţia lemei rezultă că $x_0 \in (a_n, 1]$, unde $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{1}{n-1}}$. Dacă $x_0 = 1$, atunci $y_0 = z_0 = 1$, iar inegalitatea (1) are loc cu semnul egal. Dacă $x_0 \in (a_n, 1)$, trebuie demonstrat că $f_n\left(x_0, x_0, \dfrac{1}{x_0^2}\right) \leq \dfrac{3}{2}$. Este deci suficient să demonstrăm că

$$\frac{2x}{1 + x^n} + \frac{x^{2n-2}}{1 + x^{2n}} \leq \frac{3}{2}, \quad \forall x \in (a_n, 1). \tag{7}$$

După înmulţirea cu numitorul comun inegalitatea (7) devine
$3x^{3n} - 2x^{3n-2} - 4x^{2n+1} + 3x^{2n} - 2x^{2n-2} + 3x^n - 4x + 3 \geq 0, \quad \forall x \in (a_n, 1)$.

Polinomul din membrul stâng al acestei inegalităţi are rădăcina 1, la fel derivata sa, deci polinomul este divizibil prin $(x-1)^2$. După împărţire (care se poate face cu schema lui *Horner*) inegalitatea devine

$$(x-1)^2 p_n(x) \geq 0,$$

unde

$$p_n(x) = 3x^{3n-2} + 6x^{3n-3} + 7x^{3n-4} + 8x^{3n-5} + \ldots + (n+3)x^{2n} + nx^{2n-1} +$$
$$+ nx^{2n-2} + nx^{2n-3} + (n-2)x^{2n-4} + (n-4)x^{2n-5} + \ldots + (-n+6)x^n + (-n+4)x^{n-1} +$$
$$+ (-n+5)x^{n-2} + (-n+6)x^{n-3} + (-n+7)x^{n-4} + \ldots + x^2 + 2x + 3.$$

Demonstrăm că, oricare ar fi $n \in \{3, 4, \ldots, 11\}$, avem $p_n(x) > 0$ pentru orice $x \in (a_n, 1)$.

Cazurile $\boxed{n = 3, 4, 5, 6, 7, 8}$. Avem

$p_3(x) = 3x^7 + 6x^6 + 3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 3$,

$p_4(x) = 3x^{10} + 6x^9 + 7x^8 + 4x^7 + 4x^6 + 4x^5 + 2x^4 + x^2 + 2x + 3$,

$p_5(x) = 3x^{13} + 6x^{12} + 7x^{11} + 8x^{10} + 5x^9 + 5x^8 + 5x^7 + 3x^6 + x^5 - x^4 + x^2 + 2x + 3$,

$p_6(x) = 3x^{16} + 6x^{15} + 7x^{14} + 8x^{13} + 9x^{12} + 6x^{11} + 6x^{10} + 6x^9 + 4x^8 + 2x^7 -$

$$-2x^5 - x^4 + x^2 + 2x + 3,$$

$$p_7(x) = 3x^{19} + 6x^{18} + 7x^{17} + 8x^{16} + 9x^{15} + 10x^{14} + 7x^{13} + 7x^{12} + 7x^{11} + \\ +5x^{10} + 3x^9 + x^8 - x^7 - 3x^6 - 2x^5 - x^4 + x^2 + 2x + 3,$$

$$p_8(x) = 3x^{22} + 6x^{21} + 7x^{20} + 8x^{19} + 9x^{18} + 10x^{17} + 11x^{16} + 8x^{15} + 8x^{14} + \\ +8x^{13} + 6x^{12} + 4x^{11} + 2x^{10} - 2x^8 - 4x^7 - 3x^6 - 2x^5 - x^4 + x^2 + 2x + 3.$$

Se constată uşor că aceste polinoame iau doar valori pozitive pentru orice $x \in (0,1)$. Primele două polinoame au doar coeficienţi pozitivi. În cazul lui p_5 este suficient să observăm că $-x^4 + x^2 > 0$, iar pentru p_6 că $-2x^5 - x^4 + x^2 + 2x > 0$. În cazul lui p_7 avem $x^8 - x^7 - 3x^6 - 2x^5 - x^4 + x^2 + {}$ $+2x + 3 = (x-1)(x^7 - 3x^5 - 5x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 5x - 3) > 0$, întrucât ambii factori sunt negativi. O descompunere asemănătoare este posibilă şi pentru o parte din termenii lui p_8: $4x^{11} + 2x^{10} - 2x^8 - 4x^7 - 3x^6 - 2x^5 - x^4 + x^2 + 2x + 3 =$ $= (x-1)(4x^{10} + 6x^9 + 6x^8 + 4x^7 - 3x^5 - 5x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 5x - 3) > 0$.

Pentru a demonstra pozitivitatea polinoamelor p_9, p_{10}, p_{11} mai facem un pas pregătitor. Scriind polinoamele, observăm că ultimii 8 termeni sunt aceiaşi:

$$p_9(x) = 3x^{25} + 6x^{24} + 7x^{23} + 8x^{22} + 9x^{21} + 10x^{20} + 11x^{19} + 12x^{18} + 9x^{17} + \\ + 9x^{16} + 9x^{15} + 7x^{14} + 5x^{13} + 3x^{12} + x^{11} - x^{10} - 3x^9 - 5x^8 - 4x^7 - \\ - 3x^6 - 2x^5 - x^4 + x^2 + 2x + 3,$$

$$p_{10}(x) = 3x^{28} + 6x^{27} + 7x^{26} + 8x^{25} + 9x^{24} + 10x^{23} + 11x^{22} + 12x^{21} + \\ + 13x^{20} + 10x^{19} + 10x^{18} + 10x^{17} + 8x^{16} + 6x^{15} + 4x^{14} + 2x^{13} - 2x^{11} - \\ - 4x^{10} - 6x^9 - 5x^8 - 4x^7 - 3x^6 - 2x^5 - x^4 + x^2 + 2x + 3.$$

$$p_{11}(x) = 3x^{31} + 6x^{30} + 7x^{29} + 8x^{28} + 9x^{27} + 10x^{26} + 11x^{25} + 12x^{24} + 13x^{23} + \\ + 14x^{22} + 11x^{21} + 11x^{20} + 11x^{19} + 9x^{18} + 7x^{17} + 5x^{16} + 3x^{15} + x^{14} - \\ - x^{13} - 3x^{12} - 5x^{11} - 7x^{10} - 6x^9 - 5x^8 - 4x^7 - 3x^6 - 2x^5 - x^4 + x^2 + \\ + 2x + 3.$$

Vom nota $P(x) = -5x^8 - 4x^7 - 3x^6 - 2x^5 - x^4 + x^2 + 2x + 3$ şi vom transforma acest polinom, cuprinzând fiecare termen negativ (în plus unul cu x^{11}) în câte un pătrat. Din termenul liber 3 vom folosi doar $\frac{1}{4}$, iar pe $2x$ îl vom decompune în $\frac{x}{2} + \frac{3x}{5} + \frac{9x}{10}$.

$$\frac{1}{4} - x^4 = \left(\frac{1}{2} - x^4\right)^2 - x^8,$$

$$\frac{x}{2} - 2x^5 = 2x\left(\frac{1}{2} - x^4\right)^2 - 2x^9,$$

$$\frac{3x}{5} - 3x^6 = \frac{15x}{4}\left(\frac{2}{5} - x^5\right)^2 - \frac{15x^{11}}{4},$$
$$\frac{9x}{10} - \frac{27x^7}{5} = \frac{81x}{10}\left(\frac{1}{3} - x^6\right)^2 - \frac{81x^{13}}{10},$$
$$x^2 - 6x^8 = 9x^2\left(\frac{1}{3} - x^6\right)^2 - 9x^{14},$$
$$\frac{7x^7}{5} - \frac{28x^{11}}{5} = \frac{28x^7}{5}\left(\frac{1}{2} - x^4\right)^2 - \frac{28x^{15}}{5}.$$

(Explicaţie: cazul $n = 11$ fiind cel mai dificil de demonstrat, au fost formate pătrate ale unor binoame de tipul $a^m - x^m$, unde a este în apropierea lui 0,84; a se vedea mai jos demonstraţia pentru $n = 11$.) Expresia

$$Q(x) = \left(\frac{1}{2} - x^4\right)^2 + 2x\left(\frac{1}{2} - x^4\right)^2 + \frac{15x}{4}\left(\frac{2}{5} - x^5\right)^2 + \frac{81x}{10}\left(\frac{1}{3} - x^6\right)^2 + \\ + 9x^2\left(\frac{1}{3} - x^6\right)^2 + \frac{28x^7}{5}\left(\frac{1}{2} - x^4\right)^2$$

este pozitivă pentru orice $x \in (0, 1)$. Avem

$$P(x) = Q(x) - \frac{28x^{15}}{5} - 9x^{14} - \frac{81x^{13}}{10} + \frac{37x^{11}}{20} - 2x^9 + \frac{11}{4}. \tag{8}$$

Cazurile $\boxed{n = 9, 10}$. Introducând expresia lui $P(x)$ din (8) în p_9 şi p_{10}, obţinem

$$p_9(x) = Q(x) + 3x^{25} + 6x^{24} + 7x^{23} + 8x^{22} + 9x^{21} + 10x^{20} + \\ + 11x^{19} + 12x^{18} + 9x^{17} + 9x^{16} + \frac{17}{5}x^{15} - \\ - 2x^{14} - \frac{31}{10}x^{13} + 3x^{12} + \frac{57}{20}x^{11} - x^{10} - 5x^9 + \frac{11}{4},$$
$$p_{10}(x) = Q(x) + 3x^{28} + 6x^{27} + 7x^{26} + 8x^{25} + 9x^{24} + 10x^{23} + 11x^{22} + \\ + 12x^{21} + 13x^{20} + 10x^{19} + 10x^{18} + 10x^{17} + 8x^{16} + \frac{2}{5}x^{15} - \\ - 5x^{14} - \frac{61}{10}x^{13} - \frac{3}{20}x^{11} - 4x^{10} - 8x^9 + \frac{11}{4}.$$

În cazul lui p_9, cum pentru orice $x \in (0, 1)$ avem $-2x^{14} - \frac{31}{10}x^{13} + 3x^{12} + \frac{57}{20}x^{11} > 0$, $-x^{10} > -1$, $12x^{18} - 5x^9 = 12\left(x^9 - \frac{5}{24}\right)^2 - \frac{25}{48} \geq \frac{-25}{48}$, iar $-1 - \frac{25}{48} + \frac{11}{4} > 0$, rezultă că $p_9(x) > 0$ pentru orice $x \in (0, 1)$.

În cazul lui p_{10}, pentru orice $x \in (0, 1)$ avem

$$3x^{28} + 6x^{27} + 9x^{24} - 5x^{14} > 18x^{28} - 5x^{14} = 18\left(x^{14} - \frac{5}{36}\right)^2 - \frac{25}{72},$$

$$7x^{26}+8x^{25}-\frac{61}{10}x^{13}>15x^{26}-7x^{13}=15\left(x^{13}-\frac{7}{30}\right)^2-\frac{49}{60},$$
$$-\frac{3}{20}x^{11}>-\frac{3}{20},$$
$$13x^{20}+10x^{19}-4x^{10}>23x^{20}-4x^{10}=23\left(x^{10}-\frac{2}{23}\right)^2-\frac{4}{23},$$
$$10x^{18}+10x^{17}-8x^{9}>20x^{18}-8x^{9}=20\left(x^{9}-\frac{1}{5}\right)^2-\frac{4}{5},$$

şi cum $-\frac{25}{72}-\frac{49}{60}-\frac{3}{20}-\frac{4}{23}-\frac{4}{5}+\frac{11}{4}>0$, rezultă că $p_{10}(x)>0$ pentru orice $x\in(0,1)$.

Cazul $\boxed{n=11}$. Folosind acum (8) pentru p_{11}, avem

$$\begin{aligned} p_{11}(x)=Q(x)&+3x^{31}+6x^{30}+7x^{29}+8x^{28}+9x^{27}+10x^{26}+11x^{25}\\ &+12x^{24}+13x^{23}+14x^{22}+11x^{21}+11x^{20}+11x^{19}+9x^{18}+7x^{17}\\ &+5x^{16}-\frac{13}{5}x^{15}-8x^{14}-\frac{91}{10}x^{13}-3x^{12}-\frac{63}{20}x^{11}-7x^{10}-8x^{9}+\frac{11}{4}. \end{aligned} \tag{9}$$

Este suficient să arătăm că $p_{11}(x)>0$ pentru orice $x\in(a_{11},1)$. Din inegalitatea mediilor avem $3x^{31}+6x^{30}+7x^{29}>3\sqrt[3]{126}x^{30}>15x^{30}$. Considerăm mai întâi $x\in(a_{11},\frac{9}{10})$. Avem

$$8x^{28}+9x^{27}=17x^{28}+9(x^{27}-x^{28}),\quad 10x^{26}+11x^{25}=21x^{26}+11(x^{25}-x^{26})$$
$$12x^{24}+13x^{23}=25x^{24}+13(x^{23}-x^{24}),\quad 14x^{22}+11x^{21}=25x^{22}+11(x^{21}-x^{22}),$$
$$11x^{20}+11x^{19}=22x^{20}+11(x^{19}-x^{20}),$$
$$9x^{18}+7x^{17}+5x^{16}=21x^{18}+7(x^{17}-x^{18})+5(x^{16}-x^{18}).$$

Funcţiile de tipul x^m-x^{m+1} îşi ating maximul pe $(0,1)$ în $\frac{m}{m+1}$, iar pentru $m\geq 10$ numărul $\frac{m}{m+1}$ este mai mare decât $\frac{9}{10}$. Toate funcţiile de acest tip care apar mai sus, la fel şi $x^{16}-x^{18}$, sunt strict crescătoare pe $\left[a_{11},\frac{9}{10}\right)$, prin urmare pentru orice $x\in\left(a_{11},\frac{9}{10}\right)$ avem

$$9(x^{27}-x^{28})>9(a_{11}^{27}-a_{11}^{28})>0{,}005,\quad 11(x^{25}-x^{26})\geq 11(a_{11}^{25}-a_{11}^{26})>0{,}011,$$
$$13(x^{23}-x^{24})>13(a_{11}^{23}-a_{11}^{24})>0{,}019,\quad 11(x^{21}-x^{22})>11(a_{11}^{21}-a_{11}^{22})>0{,}025,$$
$$11(x^{19}-x^{20})>11(a_{11}^{19}-a_{11}^{20})>0{,}038,\quad 7(x^{17}-x^{18})>7(a_{11}^{17}-a_{11}^{18})>0{,}037,$$
$$5(x^{16}-x^{18})>5(a_{11}^{16}-a_{11}^{18})>0{,}060.$$

Cum $0{,}005+0{,}011+0{,}019+0{,}025+0{,}038+0{,}037+0{,}06=\frac{39}{200}$, obţinem din (9)

$$p_{11}(x) > Q(x) + \left(15x^{30} - \frac{13}{5}x^{15}\right) + \left(22x^{20} - 7x^{10}\right) + \left(21x^{18} - 8x^9\right) +$$
$$+\left(17x^{28}+25x^{22}-8x^{14}-\frac{63}{20}x^{11}\right)+\left(21x^{26} + 25x^{24} - \frac{91}{10}x^{13} - 3x^{12}\right)+\frac{11}{4}+\frac{39}{200}.$$

Cu binoamele din primele trei paranteze formăm pătrate:

$$15x^{30} - \frac{13}{5}x^{15} = 15\left(x^{15} - \frac{13}{150}\right)^2 - \frac{169}{1500},$$

$$22x^{20} - 7x^{10} = 22\left(x^{10} - \frac{7}{44}\right)^2 - \frac{49}{88}, \quad 21x^{18} - 8x^9 = 21\left(x^9 - \frac{4}{21}\right)^2 - \frac{16}{21}.$$

Fie $\quad q_1(x) = 17x^{28} + 25x^{22} - 8x^{14} - \frac{63}{20}x^{11},$

$$q_2(x) = 21x^{26} + 25x^{24} - \frac{91}{10}x^{13} - 3x^{12}.$$

Se constată că $q_1''(x) > 0, q_2''(x) > 0$ pentru orice $x \in (a_{11}, 1)$, deci derivatele q_1' şi q_2' sunt strict crescătoare pe $(a_{11}, 1)$. Cum $q_1'(0{,}83) < 0$ şi $q_1'(0{,}84) > 0$, polinomul q_1 are un (singur) punct de minim x_1 pe $(a_{11}, 1)$ care se află în $(0{,}83; 0{,}84)$. Deci pentru orice $x \in (a_{11}, 1)$ avem

$$\begin{aligned} q_1(x) &\geq q_1(x_1) = 17x_1^{28} + 25x_1^{22} - 8x_1^{14} - \frac{63}{20}x_1^{11} > \\ &> 17 \cdot 0{,}83^{28} + 25 \cdot 0{,}83^{22} - 8 \cdot 0{,}84^{14} - \frac{63}{20} \cdot 0{,}84^{11} > -0{,}66. \end{aligned}$$

Asemănător rezultă din $q_2'(0{,}845) < 0$ şi $q_2'(0{,}85) > 0$ că polinomul q_2 are un (singur) minim în $(a_{11}, 1)$ pe care îl atinge într-un punct $x_2 \in (0{,}845; 0{,}85)$. Deci pentru orice $x \in (a_{11}, 1)$ avem

$$q_2(x) \geq q_2(x_2) = 21x_2^{26} + 25x_2^{24} - \frac{91}{10}x_2^{13} - 3x_2^{12} >$$
$$> 21 \cdot 0{,}845^{26} + 25 \cdot 0{,}845^{24} - \frac{91}{10} \cdot 0{,}85^{13} - 3 \cdot 0{,}85^{12} > -0{,}83.$$

Rezultă că $p_{11}(x) > -\frac{169}{1500} - \frac{49}{88} - \frac{16}{21} - 0{,}66 - 0{,}83 + \frac{11}{4} + \frac{39}{200} > 0$ pentru orice $x \in \left(a_{11}, \frac{9}{10}\right)$.

Demonstrăm acum inegalitatea $p_{11}(x) > 0$ pentru $x \in \left[\frac{9}{10}, 1\right)$.

Folosind $3x^{31} + 6x^{30} + 7x^{29} > 15x^{30}$ (a se vedea mai sus) şi $8x^{28} + 9x^{27} > 17x^{28}$, $10x^{26} + 11x^{25} > 21x^{26}$, $12x^{24} + 13x^{23} > 25x^{24}$, $14x^{22} + 11x^{21} > 25x^{22}$, $11x^{20} + 11x^{19} > 22x^{20}$, $9x^{18} + 7x^{17} + 5x^{16} > 21x^{18}$, obţinem din (9)

$$p_{11}(x) > Q(x) + \left(15x^{30} - \frac{13}{5}x^{15}\right) + \left(22x^{20} - 7x^{10}\right) +$$
$$+ \left(21x^{18} - 8x^9\right) + q_1(x) + q_2(x) + \frac{11}{4}.$$

Binoamele din primele trei paranteze sunt pozitive în $\frac{9}{10}$ şi strict crescătoare pe $\left[\frac{9}{10}, 1\right)$, deci sunt pozitive pe acest interval. Dar, potrivit celor arătate, şi polinoamele q_1 şi q_2 sunt strict crescătoare pe $\left[\frac{9}{10}, 1\right)$, şi cum şi ele sunt pozitive în $\frac{9}{10}$, rezultă pozitivitatea lor pe $\left[\frac{9}{10}, 1\right)$. Obţinem că $p_{11}(x) > 0$ pentru orice $x \in \left[\frac{9}{10}, 1\right)$.

Astfel am demonstrat că $p_{11}(x) > 0$ pentru orice $x \in (a_{11}, 1)$, ceea ce încheie demonstraţia etapei 1°.

2° Acum arătăm că pentru alte valori ale lui n decât 2, 3, …, 11 există $x, y, z > 0$ cu $xyz = 1$ astfel încât inegalitatea (1) să nu fie satisfăcută. Pentru $n = 1$ se poate alege $x = \frac{1}{4}$ şi $y = z = 2$. Pentru $n \geq 12$, alegând $x = y \in (0, 1)$ şi $z = \frac{1}{x^2}$, inegalitatea (1) ia forma

$$\frac{2x}{1+x^n} + \frac{x^{2n-2}}{1+x^{2n}} \leq \frac{3}{2}, \quad \forall x \in (0,1). \tag{10}$$

Expresia $g_n(x) = \frac{2x}{1+x^n}$ îşi atinge maximul pe $(0, 1)$ în $a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$, iar acest maxim este $m_n = \frac{2(n-1)}{n}\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$. Cum şirul $(m_n)_{n\geq 12}$ este strict crescător şi m_{12} este mai mare ca $\frac{3}{2}$, inegalitatea (10), şi, prin urmare, inegalitatea (1), nu sunt satisfăcute pentru niciun $n \geq 12$ dacă $x = y = a_n, z = \frac{1}{a_n^2}$. $\square$

Observaţii. 1) Din demonstraţia precedentă rezultă că pentru orice $n \in \{2, 3, \ldots, 11\}$ în (1) egalitatea are loc doar pentru $x = y = z = 1$. Pentru $n \geq 12$ maximul funcţiei f_n depăşeşte valoarea $\frac{3}{2}$ şi tinde asimptotic către 2 când $n \to \infty$. Are loc:

Pentru orice $x, y, z > 0$ cu $xyz = 1$ avem

$$\frac{x}{1+x^n} + \frac{y}{1+y^n} + \frac{z}{1+z^n} < 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \tag{11}$$

unde majorantul 2 nu poate fi înlocuit cu unul mai mic.

Demonstraţia acestei afirmaţii este simplă pe baza lemelor. Potrivit Lemei 1 există un punct de maxim $(x_0, y_0, z_0) \in A$ al lui f_n cu $x_0 \leq y_0 \leq z_0$. Potrivit Lemei 2 avem $x_0 = y_0 \leq 1$, deci $z_0 = \frac{1}{x_0^2}$. Trebuie arătat că $f(x_0, x_0, \frac{1}{x_0^2}) < 2$.

Este deci suficient să demonstrăm că
$$\frac{2x}{1+x^n}+\frac{x^{2n-2}}{1+x^{2n}}<2, \quad \forall x\in(0,1]. \tag{12}$$
După eliminarea numitorilor obţinem
$$2x^{3n}-x^{3n-2}-2x^{2n+1}+2x^{2n}-x^{2n-2}+2x^n-2x+2>0.$$
Această inegalitate este adevărată deoarece membrul stâng se poate scrie ca o sumă dintr-un număr pozitiv şi numere nenegative:
$$2x^{3n}+(x^{2n}-x^{3n-2})+(x^{2n}-x^{2n+1})+$$
$$+(x^n-x^{2n+1})+(x^n-x^{2n-2})+(2-2x)>0.$$

Inegalitatea (11) nu poate fi întărită. Aceasta pentru că, alegând în (11) $x=y\in(0,1]$ şi $z=\dfrac{1}{x^2}$, inegalitatea ia forma (12), iar maximul M_n al expresiei din membrul stâng al acestei inegalităţi pe $(0,1]$ (care există!) este mai mare decât maximul m_n al lui $g_n(x)=\dfrac{2x}{1+x^n}$ calculat mai sus. Cum $m_n<M_n<2$ pentru orice $n\geq 2$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} m_n=2$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} M_n=2$. □

2) Inegalitatea (11) are loc şi pentru $n=1$, ceea ce devine evident după eliminarea numitorilor. Nici în acest caz inegalitatea nu poate fi întărită întrucât două dintre fracţii se apropie de 1 când variabilele respective devin foarte mari.

3) În acelaşi mod, însă cu calcule mai simple, se poate demonstra:

a) *Pentru* $n\in\mathbb{N}^*$, *inegalitatea*
$$\frac{x}{1+x^n}+\frac{y}{1+y^n}+\frac{z}{1+z^n}+\frac{t}{1+t^n}\leq 2$$
are loc oricare ar fi numerele reale $x,y,z,t>0$ *cu* $xyzt=1$ *dacă şi numai dacă* $n\in\{2,3,4,5,6\}$.

b) *Pentru orice numere reale* $x,y,z,t>0$ *cu* $xyzt=1$ *are loc*
$$\frac{x}{1+x^n}+\frac{y}{1+y^n}+\frac{z}{1+z^n}+\frac{t}{1+t^n}<3, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*,$$
unde majorantul 3 *nu poate fi înlocuit cu unul mai mic.*

Bibliografie

[1] Vladimir Cerbu şi Mihail Bălună, *Asupra problemei 27156 din G.M.-B.* Gazeta Matematică seria B, nr. 6-7-8/2016, pg. 281-288.

[2] Marian Cucoaneş, problema 27244 din Gazeta Matematică seria B, nr. 6-7-8/2016, pg. 374.