GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Fondată în anul 1895

Anul CXXI nr. 6-7-8 **iunie-iulie-august 2016**

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

ASUPRA PROBLEMEI 27156 DIN G.M.-B

Vladimir Cerbu[1)] şi Mihail Bălună[2)]

Abstract. This article presents nine solutions to an interesting problem from this magazine.

Keywords: inequalities with constraints

MSC: 26D20

Articolul de faţă prezintă nouă soluţii, ordonate de la „elementar" la „superior", pentru problema din [4]. Iată enunţul:

Numerele reale a, b, c, d verifică condiţiile

$$a + b + c + d = 6 \tag{1}$$

şi

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12. \tag{2}$$

Să se arate că $abcd \leq 3$.

În cele ce urmează vom nota

$$\sum a = a + b + c + d,$$

$$\sum ab = ab + ac + ad + bc + bd + cd,$$

$$\sum abc = abc + abd + acd + bcd,$$

$$P = abcd,$$

$$\sum a^n = a^n + b^n + c^n + d^n, n \in \mathbb{N}^*.$$

[1)]Profesor, Colegiul Naţional Militar „Ştefan cel Mare'", Câmpulung Moldovenesc.

[2)]Profesor, Colegiul Naţional „Mihai Viteazul", Bucureşti.

Majoritatea soluţiilor pe care le vom prezenta folosesc câteva proprietăţi ale numerelor reale $a,\ b,\ c,\ d$ care verifică relaţiile (1) şi (2). Din ipoteză avem $\sum a = 6$ şi $\sum a^2 = 12$. Ridicând la pătrat egalitatea $\sum a = 6$ obţinem

$$\sum ab = 12. \tag{3}$$

Folosind inegalitatea *Cauchy-Schwarz* obţinem $(b+c+d)^2 \leq 3(b^2+c^2+d^2)$ adică $(6-a)^2 \leq 3(12-a^2)$; analog pentru celelalte variabile. Rezultă

$$a, b, c, d \in [0, 3]\,. \tag{4}$$

În continuare avem $(b+c+d)^2 = (6-a)^2$, de unde $12 - a^2 + 2(bc + bd + cd) = 36 - 12a + a^2$, $bc + bd + cd = a^2 - 6a + 12$, deci $abc + abd + acd = a^3 - 6a^2 + 12a$. Mai scriem trei egalităţi similare (pornind cu $a + b + d$ respectiv $a + c + d$ şi $a + b + c$) şi, adunând cele patru egalităţi, rezultă $3\sum abc = \sum a^3 - 6\sum a^2 + 12\sum a$, de unde deducem relaţia

$$3\sum abc = \sum a^3. \tag{5}$$

Observaţie. Relaţia (5) se poate obţine direct din identitatea

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 - 3\sum_{1\leq i<j<k\leq n} a_i a_j a_k = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j\right).$$

Soluţia 1 (*Vladimir Cerbu*). Numerele reale $a,\ b,\ c,\ d$ sunt soluţiile ecuaţiei $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = 0$. Prin desfacerea parantezelor ecuaţia devine $x^4 - (\sum a)\,x^3 + (\sum ab)\,x^2 - (\sum abc)\,x + abcd = 0$, sau

$$P = \left(\sum abc\right)x - 12x^2 + 6x^3 - x^4.$$

Deoarece numerele $a,\ b,\ c,\ d$ sunt soluţii ale ecuaţiei rezultă că au loc relaţiile:

$$P = \left(\sum abc\right)a - 12a^2 + 6a^3 - a^4, \quad P = \left(\sum abc\right)b - 12b^2 + 6b^3 - b^4,$$

$$P = \left(\sum abc\right)c - 12c^2 + 6c^3 - c^4, \quad P = \left(\sum abc\right)d - 12d^2 + 6d^3 - d^4$$

Adunând aceste patru egalităţi obţinem $4P = (\sum abc)(\sum a) - 12\sum a^2 + 6\sum a^3 - \sum a^4$, adică $4P = 6\sum abc - 144 + 6\sum a^3 - \sum a^4$, de unde, conform (5), $P = \frac{1}{4}(8\sum a^3 - \sum a^4 - 144)$. Avem succesiv $P = \frac{1}{4}\sum\left(8a^3 - a^4\right) - 36 = \frac{1}{4}\sum(16a^2 - (a^2-4a)^2) - 36 = 4\sum a^2 - \frac{1}{4}\sum\left(a^2-4a\right)^2 - 36$, deci $P = 12 - \frac{1}{4}\sum\left(a^2-4a\right)^2$.

Cu inegalitatea *Cauchy-Schwarz* obţinem

$$\sum\left(a^2-4a\right)^2 \geq \frac{1}{4}\left(\sum\left(a^2-4a\right)\right)^2 = 36,$$

deci $P = 12 - \dfrac{1}{4}\sum\left(a^2-4a\right)^2 \le 12 - \dfrac{1}{4}\cdot 36 = 3$, adică $P \le 3$.

Egalitatea $P = 3$ se obţine dacă şi numai dacă $\sum\left(a^2-4a\right)^2 = 36$, adică $a^2-4a = b^2-4b = c^2-4c = d^2-4d \overset{\text{not}}{=} k$. Adunând aceste patru egalităţi obţinem $\sum a^2 - 4\sum a = 4k$, de unde $k = -3$. În acest caz, a, b, c, d sunt printre soluţiile ecuaţiei $x^2-4x+3=0$, adică $a,b,c,d \in \{1,3\}$. Singurele situaţii care verifică condiţiile din enunţ sunt

$$(a,b,c,d) \in \{\,(3,1,1,1)\,;\ \ (1,3,1,1)\,;\ \ (1,1,3,1)\,;\ \ (1,1,1,3)\,\}\,.$$

Soluţia 2 (*Mihail Bălună*) Căutăm nişte substituţii inspirate de cazul de egalitate şi de ipoteză. Înlocuind

$$a-\frac{3}{2}=s, b-\frac{3}{2}=t, c-\frac{3}{2}=u, d-\frac{3}{2}=v$$

obţinem

$$\sum s = 0, \quad \sum s^2 = 3.$$

Înlocuind apoi $v = -s-t-u$ avem $(s+t)^2+(t+u)^2+(u+s)^2 = 3$. Înlocuind acum $s+t=-x$, $t+u=-y$, $u+s=-z$ problema se reduce la a dovedi că $x^2+y^2+z^2=3$ implică

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{x+y+z}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{x-y-z}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{-x+y-z}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{-x-y+z}{2}\right) \le 3.$$

După calcule, aceasta revine la

$$81+\sum x^4 - 18\sum x^2 - 2\sum x^2y^2 + 24xyz \le 48,$$

sau, ţinând cont că $\sum x^2 = 3$ şi $\sum x^4 = 9 - 2\sum x^2y^2$, la

$$\sum x^2y^2 - 6xyz + 3 \ge 0.$$

Aceasta rezultă prin adunarea inegalităţii $x^2y^2 - 2xyz + z^2 \ge 0$ cu celelalte două inegalităţi analoage.

Soluţia 3 (*Vladimir Cerbu*). Fie $a = 2x+1$, $b = 2y+1$, $c = 2z+1$, $d = 2t+1$. Condiţiile din enunţ devin

$$x+y+z+t = 1, \tag{1.1}$$

$$x^2+y^2+z^2+t^2 = 1. \tag{2.1}$$

Vom demonstra că $x,y,z,t \in [-1/2,1]$. Folosind inegalitatea *Cauchy-Schwarz* obţinem $(y+z+t)^2 \le 3(y^2+z^2+t^2)$ deci, conform (1.1), (1.2), $(1-x)^2 \le 3(1-x^2)$, sau $2x^2-x-1 \le 0$, de unde $x \in [-1/2,1]$. Analog se demonstrează că $y,z,t \in [-1/2,1]$.

Avem $P = abcd = (2x+1)\,(2y+1)\,(2z+1)\,(2t+1)$ şi făcând calculele obţinem $P = 16xyzt + 8(xyz+xyt+xzt+yzt) + 4(xy+xz+xt+yz+yt+zt) + 2(x+y+z+t) + 1$.

Ridicând (1.1) la pătrat deducem relaţia
$$xy + xz + xt + yz + yt + zt = 0. \tag{3.1}$$

Dacă notăm $Q = 2xyzt + xyz + xyt + xzt + yzt$, folosind relaţiile (1.1) şi (3.1) obţinem $P = 8Q + 3$. Atunci $P \leq 3 \iff Q \leq 0$.

Demonstrăm că produsele de câte trei variabile nu pot fi toate pozitive. Dacă $xyz > 0$, $xyt > 0$, $xzt > 0$, $yzt > 0$, prin înmulţirea acestor inegalităţi obţinem $(xyzt)^3 > 0$, deci $xyzt > 0$, iar de aici rezultă că $x, y, z, t > 0$. Avem $x, y, z, t \in (0, 1]$, deci $x^2 \leq x$, $y^2 \leq y$, $z^2 \leq z$ şi $t^2 \leq t$. Deoarece $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x + y + z + t$ rezultă că $x^2 = x$, $y^2 = y$, $z^2 = z$ şi $t^2 = t$, adică $x = y = z = t = 1$, imposibil pentru că nu se verifică condiţia (1.1).

Rămâne că măcar unul dintre produsele de câte trei variabile nu este pozitiv, de exemplu $xyz \leq 0$. Atunci
$$\begin{aligned} Q &= xyz\,(2t+1) + t\,(xy + xz + yz) = \\ &= xyz\,(2t+1) + t\,(-xt - yt - zt) = \\ &= xyz\,(2t+1) - t^2\,(x+y+z) = xyz\,(2t+1) - t^2\,(1-t)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Deoarece $t \in [-1/2, 1]$ avem $2t + 1 \geq 0$, $t^2\,(1-t) \geq 0$ şi, cum $xyz \leq 0$, obţinem $Q \leq 0$.

Din relaţia (6) rezultă că egalitatea $P = 3$ se realizează dacă şi numai dacă $xyz\,(2t+1) = 0$ şi $t^2\,(1-t) = 0$.

Pentru $t = 1$ reiese, coform (2.1), $x = y = z = 0$, iar pentru $t = 0$ reiese $xyz = 0$, deci $x = 0$ sau $y = 0$ sau $z = 0$. Dacă, de exemplu, $z = 0$, atunci $x + y = 1$, $x^2 + y^2 = 1$, $x = 1, y = 0$ sau $x = 0, y = 1$. Aşadar, avem egalitate doar pentru $(x, y, z, t) \in \{(1,0,0,0)\,;\ (0,1,0,0)\,;\ (0,0,1,0)\,;\ (0,0,0,1)\}$, adică pentru $(a, b, c, d) \in \{(3,1,1,1)\,;\ (1,3,1,1)\,;\ (1,1,3,1)\,;\ (1,1,1,3)\}$.

Soluţia 4 (*Mircea Lascu*[1)]). Din relaţia (4) avem $a, b, c, d \in [0,\,3]$. Dacă unul dintre numerele a, b, c, d este egal cu 3, atunci se demonstreză uşor că celelalte trei numere sunt egale cu 1 şi inegalitatea din enunţ are loc cu egalitate. Presupunem în continuare că $a, b, c, d < 3$.

Deoarece relaţia este simetrică în cele patru variabile, putem alege o ordonare a lor, de exemplu $a \geq b \geq c \geq d$. Vom arăta că $d \leq 1$. Presupunând contrariul vom avea $3 > a \geq b \geq c \geq d > 1$. Însumând inegalităţile evidente $0 > (a-1)\,(a-3) = a^2 - 4a + 3$ şi cele analoage pentru numerele b, c şi d obţinem $0 > \sum a^2 - 4\sum a + 12 = 0$ – absurd.

Din $a \in [0, 3]$ rezultă $(a-3)\,(a-1)^2 = a^3 - 5a^2 + 7a - 3 \leq 0$; scriind inegalităţile corespunzătoare pentru b, c, d şi apoi însumând rezultă
$$\sum a^3 \leq 30. \tag{7}$$

Din (5) şi (7) reiese $30 \geq \sum a^3 = 3\sum abc = 3abc + 3d(bc + ca + ab) = 3abc + 3d\dfrac{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)}{2} = 3\dfrac{abcd}{d} + 3d\dfrac{(6-d)^2 - (12-d^2)}{2}$ de

[1)]Profesor, Zalău.

unde obţinem

$$abcd \le d\left(10 - d\frac{(6-d)^2 - (12-d^2)}{2}\right).$$

Este suficient să demonstrăm că $d\left(10 - d\dfrac{(6-d)^2 - (12-d^2)}{2}\right) \le 3$, care prin calcul direct, este echivalentă cu $(d-3)\,(d-1)^3 \ge 0$. Ultima inegalitate este adevărată deoarece $d \in [0,1]$.

Egalitatea are loc doar dacă în (7) avem egalitate, fapt ce are loc atunci şi numai atunci când unul dintre numerele $a,\ b,\ c,\ d$ este egal cu 3 şi celelalte egale cu 1.

Soluţia 5 (*Marian Cucoaneş*[1)]). Vom folosi o inegalitate a lui *Vo Quoc Ba Can* ([3]):

Dacă a, b, c sunt numere reale şi $a+b+c=p$, $3(ab+bc+ca)=p^2-q^2$, $q \ge 0$, $abc=r$ atunci

$$(p+q)^2\,(p-2q) \le 27r \le (p-q)^2\,(p+2q)\,.$$

Conform (4) putem presupune că $0 \le a \le b \le c \le d \le 3$. Atunci $6 = a+b+c+d \le 4d$, de unde rezultă că $d \ge \dfrac{3}{2}$. (8)

Notăm $p = a+b+c = 6-d$, $q = \sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$ şi $r = abc$. Deoarece $3\left(a^2+b^2+c^2\right) = p^2+2q^2$ rezultă $3\left(12-d^2\right) = (6-d)^2+2q^2$ de unde obţinem $q = \sqrt{6d-2d^2}$. Folosind inegalitatea *Vo Quoc Ba Can* avem

$$\begin{aligned}27abc = 27r &\le (p-q)^2\,(p+2q) = p^3 - 3pq^2 + 2q^3\\ &= 216 - 216d + 72d^2 - 7d^3 + 2\sqrt{\left(6d-2d^2\right)^3}.\end{aligned}$$

Este suficient să demonstrăm că

$$216d - 216d^2 + 72d^3 - 7d^4 + 4d^2\,(3-d)\,\sqrt{6d-2d^2} \le 81,$$

adică $(3-d)\left(-7d^3+51d^2-63d+27\right) \ge 4d^2\,(3-d)\,\sqrt{6d-2d^2}$. Dacă ţinem cont că $3-d \ge 0$, ar mai trebui demonstrat că

$$4d^2\sqrt{6d-2d^2} \le -7d^3+51d^2-63d+27. \tag{9}$$

Din inegalitatea mediilor avem $4d^2\sqrt{6d-2d^2} = 2d \cdot 2d\sqrt{6d-2d^2} \le 2d\left(d^2+6d-2d^2\right)$ de unde rezultă că

$$4d^2\sqrt{6d-2d^2} \le -2d^3+12d^2. \tag{10}$$

Vom demonstra în continuare că

$$-2d^3+12d^2 \le -7d^3+51d^2-63d+27. \tag{11}$$

1) Profesor, Mărăşeşti.

Inegalitatea (11) este echivalentă cu $-5d^3+39d^2-63d+27 \geq 0$ care este adevărată, deoarece $-5d^3+39d^2-63d+27 = (3-d)^2+2d(6-d)(2d-3) \geq 0$ (am folosit (4) şi (8)).

Din (10) şi (11) rezultă că (9) este adevărată, ceea ce încheie soluţia.

Soluţia 6 (*Marian Cucoaneş*). Conform (4) putem presupune că $0 \leq$ $\leq a \leq b \leq c \leq d \leq 3$.

Dacă $c < 1$ atunci $a+b+c < 3$ adică $6-d < 3$ de unde obţinem $d > 3$ – absurd. Rămâne că $c \geq 1$ şi atunci avem $1 \leq c \leq d \leq 3$.

Notăm $c+d = s$ şi $cd = p$. Avem $2 \leq s \leq 6$, $1 \leq p \leq 9$, $c^2+d^2 = s^2-2p$, $a+b = 6-s$, $a^2+b^2 = 12-s^2+2p$ şi $ab = \dfrac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2} = s^2-6s-p+12$.

Trebuie să demonstrăm una dintre relaţiile echivalente $abcd \leq 3$, $p(s^2-6s-p+12) \leq 3$, $(s-3)^2 \leq p+\dfrac{3}{p}-3$,

$$3-\sqrt{p+\frac{3}{p}-3} \leq s \leq 3+\sqrt{p+\frac{3}{p}-3}. \tag{12}$$

Căutăm o încadrare pentru s. Deoarece $s^2-4p = (c-d)^2 \geq 0$ rezultă că $s \geq 2\sqrt{p}$. Similar, $0 \leq (a-b)^2 = (a+b)^2-4ab = (6-s)^2-4(s^2-6s-p+12) =$ $= 4p-3s^2+12s-12$ de unde deducem că $4p \geq 3(s-2)^2$. Cum $s \geq 2$ rezultă $2\sqrt{p} \geq (s-2)\sqrt{3}$, deci $s \leq \dfrac{2\sqrt{p}}{\sqrt{3}}+2$.

Din cele de mai sus avem următoarea încadrare a lui s:

$$2\sqrt{p} \leq s \leq \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{3}}+2. \tag{13}$$

Ţinând cont de (12) şi (13), pentru a încheia rezolvarea problemei ar fi suficient să demonstrăm inegalităţile:

$$3-\sqrt{p+\frac{3}{p}-3} \leq 2\sqrt{p} \tag{14}$$

$$\frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{3}}+2 \leq 3+\sqrt{p+\frac{3}{p}-3} \tag{15}$$

Inegalitatea (14) este echivalentă cu $2p+\sqrt{p^2-3p+3} \geq 3\sqrt{p}$ care, după ridicare la pătrat, devine

$$4p\sqrt{p^2-3p+3} \geq -5p^2+12p-3. \tag{14.1}$$

Fie $\alpha = \dfrac{6+\sqrt{21}}{5}$. Pentru $p \in [\alpha, 9]$ inegalitatea (14.1) este adevărată (membrul stâng este pozitiv, iar cel drept negativ).

Pentru $p \in [1, \alpha]$, prin ridicare la pătrat inegalitatea (14.1) devine $16p^2(p^2-3p+3) \geq (-5p^2+12p-3)^2$, sau $9(p-1)^2(p^2-6p+1) \leq 0$, care este adevărată deoarece $3-2\sqrt{2} < 1 \leq p \leq \alpha < 3+2\sqrt{2}$.

Inegalitatea (15) este echivalentă cu $2p \leq \sqrt{3p} + \sqrt{3p^2 - 9p + 9}$ care, după ridicare la pătrat, devine $p^2 + 6p - 9 \leq 6\sqrt{p\left(p^2 - 3p + 3\right)}$, $\quad (15.1)$.

Pentru $p \in \left[1\,,\, 3\sqrt{2} - 3\right]$ inegalitatea (15.1) este adevărată (membrul stâng este negativ, iar cel drept pozitiv). Pentru $p \in \left[3\sqrt{2} - 3\,,\, 9\right]$, prin ridicare la pătrat, inegalitatea (15.1) devine $(p^2+6p-9)^2 \leq 36(p^3-3p^2+3p)$, sau $(p-3)^2(p^2 - 18p + 9) \leq 0$, care este adevărată deoarece $9 - 6\sqrt{2} \leq$ $\leq 3\sqrt{2} - 3 \leq p \leq 9 \leq 9 + 6\sqrt{2}$.

Soluţia 7 (*Mihai Piticari*[1)]). Din relaţia (4) avem $a, b, c, d \in [0,\, 3]$. Vom demonstra că, în condiţiile din enunţ are loc inegalitatea

$$\sum abc \leq 10. \tag{16}$$

Pentru a justifica aceasta considerăm funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\;\; f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\,.$$

Desfăcând parantezele obţinem $f(x) = x^4 - \left(\sum a\right)x^3 + \left(\sum ab\right)x^2 -$ $- \left(\sum abc\right)x + abcd$ adică $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - \left(\sum abc\right)x + abcd$. Atunci $f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - \sum abc$ şi $f''(x) = 12x^2 - 36x + 24$. Evident $f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$ sau $x = 2$.

Deoarece a, b, c, d sunt zerourile lui f, rezultă că f' are trei zerouri reale şi, utilizând şirul lui *Rolle*, deducem că $f'(1) \geq 0$ şi $f'(2) \leq 0$. Din $f'(1) \geq 0$ obţinem imediat $\sum abc \leq 10$.

Vom demonstra că măcar unul dintre numerele a, b, c, d este în intervalul $[0, 1]$: dacă $a, b, c, d \in (1, 3]$ atunci $\sum (a-1)(b-1) > 0$ adică $\sum ab - 3\sum a +$ $6 > 0$, adică $0 > 0$ − absurd.

Fie $a \in [0, 1]$. Deoarece a este soluţie a ecuaţiei $f(x) = 0$ avem $a^4 -$ $6a^3 + 12a^2 - \left(\sum abc\right)\cdot a + abcd = 0$, de unde rezultă, folosind şi (16),

$$\begin{aligned} abcd &= -a^4 + 6a^3 - 12a^2 + \left(\sum abc\right)\cdot a \\ &\leq -a^4 + 6a^3 - 12a^2 + 10a \\ &= 3 - (a-1)^3(a-3) \\ &\leq 3. \end{aligned}$$

Soluţia 8 (*Ovidiu Avădanei*[2)], *Mihail Bălună*, *Vladimir Cerbu*).

O abordare a problemei cu metode mai avansate este bazată pe metoda multiplicatorilor lui Lagrange. Fie $f(a,b,c,d) = abcd$, $g_1(a,b,c,d) = a + b +$ $+c + d - 6$ şi $g_2(a,b,c,d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 12$.

Cele trei funcţii sunt de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^4$. Observăm că relaţia $g_2 = 0$ defineşte o mulţime compactă, deci există maximul funcţiei f cu legăturile

[1)] Profesor, Câmpulung Moldovenesc.

[2)] Elev, Iaşi.

$g_1 = 0$, $g_2 = 0$. Considerăm aşadar funcţia $F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$ şi sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial d} = 0, \quad g_1 = 0, \quad g_2 = 0,$$

adică $bcd + \lambda_1 + 2a\lambda_2 = 0$, $acd + \lambda_1 + 2b\lambda_2 = 0$, $abd + \lambda_1 + 2c\lambda_2 = 0$, $abc+\lambda_1+2d\lambda_2 = 0$, $a+b+c+d = 6$, $a^2+b^2+c^2+d^2 = 12$. Analizând sistemul format din primele patru ecuaţii reiese că maximul se obţine atunci când cel puţin două variabile sunt egale. Dacă luăm aceste variabile $c = d = x$, atunci obţinem $2ab = (a + b)^2 - a^2 - b^2 = (6 - 2x)^2 - (12 - 2x^2) = 6(x^2 - 4x + 4)$ şi $abcd = 3(x(2-x))^2$. Din $a+b = 6-2x$, $a^2+b^2 = 12-2x^2$ şi $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$ rezultă $2(12 - 2x^2) \geq (6 - 2x)^2$, de unde $x \in I = [(3 - \sqrt{3})/2, 3 + \sqrt{3})/2]$. Se verifică imediat că $\max |x(2 - x)|$ pe intervalul I este 1 şi rezultă $abcd \leq 3$, cu egal pentru trei dintre numere egale cu 1 şi al patrulea egal cu 3.

Soluţia 9 (*Dan Popescu*[1)]). O altă abordare a problemei folosind metode mai avansate se sprijină pe *teorema variabilelor egale*. Astfel, Corolarul din [2] rezolvă în totalitate problema:

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \geq 3$ numere reale nenegative fixate şi $0 \leq x_1 \leq \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ astfel încât

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p = a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p,$$

unde p este un număr real, $p \neq 0$ şi $p \neq 1$. Atunci

(i) *pentru $p < 0$, produsul $P = x_1 x_2 \ldots x_n$ este minim când $0 < x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} \leq x_n$ şi este maxim când $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = x_n$;*

(ii) *pentru $p > 0$, produsul $P = x_1 x_2 \ldots x_n$ este maxim când $0 \leq x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} \leq x_n$ şi este minim când $x_1 = 0$ sau $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = x_n$.*

În cazul nostru avem $n = 4$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $a_4 = 3$ şi $p = 2$. Demonstrând în prealabil că $a, b, c, d \geq 0$, conform punctului (ii) din corolarul de mai sus obţinem că produsul $P = abcd$ este maxim atunci când $0 \leq a = b = c \leq d$. Cele două condiţii din enunţ conduc la sistemul $3a + d = 6$, $3a^2 + d^2 = 12$. Obţinem $a = b = c = 1$ şi $d = 3$, deci valoarea maximă a lui P este 3.

Bibliografie

[1] P. Flondor, O. Stănăşilă, *Lecţii de analiză matematică*, Editura ALL, Bucureşti, 1993.
[2] V. Cîrtoaje, *The equal variable method*; Journal of inequlities in pure and applied mathematics, vol. 8, iss.1, art. 15, Victoria University, 2007.
[3] Vo Quoc Ba Can, C. Pohoaţă, *Old and New Inequalities*, editura GIL, Zalău, 2008.
[4] Marius Stănean, *Problema 27156*, Gazeta matematică seria B, nr. 12 / 2015, pg. 591.

[1)] Profesor, Suceava.