ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

ASUPRA UNEI PROBLEME DE ARII

Dana Heuberger[1)] şi Petru Braica[2)]

Abstract. In this paper we present some generalisations of an interesting problem from *Kvant* magazine, concerning two surfaces with the same area.

Keywords: area, decomposition into triangles
MSC: 51M04

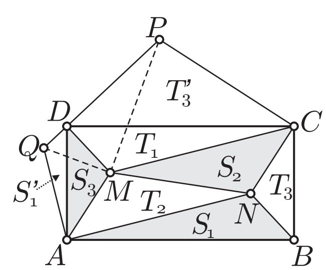
În această notă vom prezenta câteva generalizări ale unei probleme interesante de geometrie, apărută în anul 2002 în revista Kvant şi dată la cea de-a IV-a ediţie a concursului „Gazeta Matematică şi Viitori Olimpici", în anul şcolar 2012-2013. Problema sursă este următoarea:

În interiorul pătratului $ABCD$ se consideră două puncte, M şi N, astfel încât $m(\sphericalangle MAN) = m(\sphericalangle MCN) = 45°$, $M \in \text{Int}(\sphericalangle NAD)$. *Suprafeţele triunghiurilor MAD, MCN şi NAB se colorează cu roşu, iar suprafeţele triunghiurilor MCD, MAN şi NCB se colorează cu albastru. Arătaţi că suprafaţa colorată cu roşu şi suprafaţa colorată cu albastru au aceeaşi arie.*

Pe site-ul [4] se poate vedea o foarte elegantă soluţie a acestei probleme, folosind construcţii auxiliare. Nu o vom reproduce, deoarece o abordare puţin diferită ne-a condus către o primă generalizare.

G1. *În interiorul dreptunghiului $ABCD$ se consideră două puncte, M şi N, astfel încât* $m(\sphericalangle MAN) = m(\sphericalangle MCN) = 45°$, $M \in \text{Int}(\sphericalangle NAD)$. *Notăm* $AB = x$, $BC = y$, $S_{ANB} = S_1$, $S_{CMN} = S_2$, $S_{AMD} = S_3$, $S_{CDM} = T_1$, $S_{AMN} = T_2$ şi $S_{BCN} = T_3$. *Atunci are loc relaţia*

$$x^2S_3 + y^2S_1 + xyS_2 = x^2T_3 + y^2T_1 + xyT_2.$$



Demonstraţie. Construim triunghiurile ADQ şi DCP, astfel încât sunt orientate în sens trigonometric şi $\triangle ADQ \sim \triangle ABN$, cu raportul de asemănare $\dfrac{y}{x}$, iar $\triangle DCP \sim \triangle BCN$, cu raportul de asemănare $\dfrac{x}{y}$. Din congruenţele unghiurilor acestor triunghiuri asemenea rezultă uşor că punctele Q, D, P sunt coliniare. Apoi obţinem $\dfrac{QD}{PD} = \dfrac{QD}{NB} \cdot \dfrac{NB}{PD} = \dfrac{AD}{AB} \cdot \dfrac{BC}{DC} = \dfrac{y^2}{x^2}$.

[1)] Profesor, Colegiul Naţional „Gheorghe Şincai", Baia Mare.
[2)] Profesor, Şcoala Gimnazială „Grigore Moisil", Satu Mare.

Notăm $S_{ADQ} = S'_1$, $S_{DCP} = T'_3$, $S_{CPM} = S'_2$ şi $S_{AQM} = T'_2$. Deducem

$$\frac{S'_1 + S_3 - T'_2}{T'_3 + T_1 - S'_2} = \frac{S_{DQM}}{S_{DPM}} = \frac{QD}{PD} = \frac{y^2}{x^2}. \tag{1}$$

Pe de altă parte, avem $S'_1 = \dfrac{y^2}{x^2} S_1$ şi $T'_3 = \dfrac{x^2}{y^2} T_3$. Apoi,

$$\frac{T'_2}{T_2} = \frac{AQ \cdot AM}{AN \cdot AM} = \frac{AD}{AB} = \frac{y}{x},$$

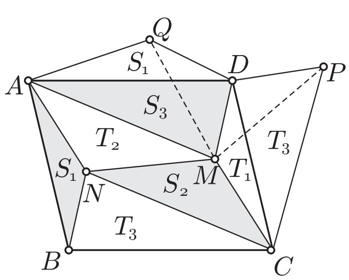
adică $T'_2 = \dfrac{y}{x} T_2$. Analog deducem că $S'_2 = \dfrac{x}{y} S_2$. Înlocuind în (1) obţinem

$$\frac{y^2}{x^2} S_1 + S_3 - \frac{y}{x} T_2 = \frac{y^2}{x^2} \left(\frac{x^2}{y^2} T_3 + T_1 - \frac{x}{y} S_2 \right)$$

relaţie echivalentă cu $x^2 S_3 + y^2 S_1 + xy S_2 = x^2 T_3 + y^2 T_1 + xy T_2$. □

Ne punem întrebarea dacă enunţul rămâne adevărat şi atunci când înlocuim dreptunghiul cu un paralelogram oarecare $ABCD$, pentru care, cu aceleaşi notaţii ca mai înainte, să avem $\mathrm{m}(\sphericalangle MAN) = \mathrm{m}(\sphericalangle MCN) = \dfrac{1}{2}\mathrm{m}(\sphericalangle A)$. Vom vedea mai întâi două situaţii în care putem da răspuns afirmativ la această întrebare.

G2. *În interiorul rombului $ABCD$ se consideră două puncte, M şi N, astfel încât $\mathrm{m}(\sphericalangle MAN) = \mathrm{m}(\sphericalangle MCN) = \frac{1}{2}\mathrm{m}(\sphericalangle A)$, $M \in \mathrm{Int}(\sphericalangle NAD)$. Atunci, are loc egalitatea: $S_{ANB} + S_{CMN} + S_{AMD} = S_{CDM} + S_{AMN} + S_{BCN}$.*



Demonstraţie. Notăm $S_{ANB} = S_1$, $S_{CMN} = S_2$, $S_{AMD} = S_3$, $S_{CDM} = T_1$, $S_{AMN} = T_2$ şi $S_{BCN} = T_3$. Arătăm că

$$S_1 + S_2 + S_3 = T_1 + T_2 + T_3.$$

Construim triunghiurile ADQ şi DCP, astfel încât sunt orientate în sens trigonometric şi $\triangle ADQ \equiv \triangle ABN$, iar $\triangle DCP \equiv \triangle BCN$. Obţinem $\triangle AMQ \equiv \triangle AMN$ (L.U.L.), deci $MQ = MN$. Apoi $\triangle CMP \equiv \triangle CMN$ (L.U.L.), deci $MP = MN$. Aşadar $MQ = MP$.

Dar $DQ = DP = BN$, deci $\triangle DMQ \equiv \triangle DMP$ (L.L.L.). Deoarece $S_{AMQ} = \dfrac{1}{2} AQ \cdot AM \cdot \sin \dfrac{A}{2} = T_2$ şi $S_{CMP} = \dfrac{1}{2} CP \cdot CM \cdot \sin \dfrac{A}{2} = S_2$, obţinem

$$S_{DMQ} = S_{DMP} \Leftrightarrow S_{ADQ} + S_{ADM} - S_{AQM} = S_{CDP} + S_{CDM} - S_{CPM} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_1 + S_3 - T_2 = T_3 + T_1 - S_2 \Leftrightarrow S_1 + S_2 + S_3 = T_1 + T_2 + T_3. \qquad \square$$

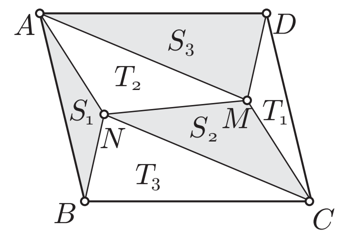
G3. *În interiorul paralelogramului $ABCD$ se consideră două puncte, M şi N, astfel încât $\triangle AMN \sim \triangle CNM$, $M \in \mathrm{Int}(\sphericalangle NAD)$. Fie $AB = x$,*

$BC = y$, $S_{ANB} = S_1$, $S_{CMN} = S_2$, $S_{AMD} = S_3$, $S_{CDM} = T_1$, $S_{AMN} = T_2$ *şi* $S_{BCN} = T_3$. *Atunci, are loc relaţia*

$$x^2 S_3 + y^2 S_1 + xyS_2 = x^2 T_3 + y^2 T_1 + xyT_2.$$

Demonstraţie. Se arată uşor, folosind unghiurile congruente, că $AMCN$ este un paralelogram, apoi că $\triangle AMD \equiv \triangle CNB$ şi $\triangle ABN \equiv \triangle DCM$, iar de aici rezultă imediat concluzia, deoarece

$$S_1 = T_1,\ S_2 = T_2,\ S_3 = T_3.$$



Acum putem da răspunsul la întrebarea pe care ne-am pus-o mai înainte.

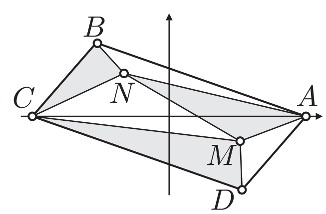
G4. *În interiorul paralelogramului $ABCD$ se consideră două puncte, M şi N, astfel încât $M \in \mathrm{Int}(\sphericalangle NAD)$ şi $\mathrm{m}(\sphericalangle MAN) = \mathrm{m}(\sphericalangle MCN) = \frac{1}{2}\mathrm{m}(\sphericalangle A)$. Notăm $AB = x$, $BC = y$, $S_{ANB} = S_1$, $S_{CMN} = S_2$, $S_{AMD} = S_3$, $S_{CDM} = T_1$, $S_{AMN} = T_2$ şi $S_{BCN} = T_3$. Atunci sunt echivalente afirmaţiile*

(1) $x^2 S_3 + y^2 S_1 + xyS_2 = x^2 T_3 + y^2 T_1 + xyT_2$;

(2) *$ABCD$ este dreptunghi sau romb, sau $\triangle AMN \sim \triangle CNM$.*

Demonstraţie. Implicaţia (2) $\Rightarrow$ (1) este adevărată, din generalizările **G1**, **G2** şi **G3**.

„(1) $\Rightarrow$ (2)". Presupunem că $ABCD$ nu este nici dreptunghi nici romb şi triunghiurile AMN şi CNM nu sunt asemenea. Aşadar $\frac{NC}{MC} \neq \frac{MA}{NA}$. Notând $k = \frac{NC}{MC}$ şi $t = \frac{NA}{MA}$, obţinem $kt \neq 1$. În plus, $A \neq \frac{\pi}{2}$ şi $x \neq y$.



Alegem un reper cartezian cu originea în centrul paralelogramului, astfel încât acesta să fie orientat în sens trigonometric şi să avem $A(1)$, $C(-1)$, $B(b)$, $D(d)$, $M(m)$, $N(n)$, cu $b, d, m, n \in \mathbb{C}$. Notăm $\alpha = \cos\frac{A}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{A}{2}$. Atunci $d = -b$ şi $\frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} = \frac{BC}{DC}(\cos C + \mathrm{i}\sin C)$, adică $\frac{b+1}{1-b} = \frac{y}{x}\alpha^2 = \frac{y\alpha}{x\overline{\alpha}}$. Obţinem

$$b = \frac{y\alpha - x\overline{\alpha}}{y\alpha + x\overline{\alpha}}. \tag{2}$$

Apoi, din $\begin{cases} \dfrac{z_N - z_C}{z_M - z_C} = \dfrac{n+1}{m+1} = k\alpha \\ \dfrac{z_M - z_A}{z_N - z_A} = \dfrac{m-1}{n-1} = \dfrac{\alpha}{t} = \dfrac{1}{t\overline{\alpha}} \end{cases}$ reiese $\begin{cases} m = \dfrac{k\alpha + t\overline{\alpha} - 2}{t\overline{\alpha} - k\alpha} \\ n = \dfrac{2kt - t\overline{\alpha} - k\alpha}{t\overline{\alpha} - k\alpha} \end{cases}$.

Astfel,

$$m + n = \frac{2(kt-1)}{t\overline{\alpha} - k\alpha},\quad \overline{m}n - m\overline{n} = \frac{2(kt-1)(t-k)(\alpha - \overline{\alpha})}{(t\alpha - k\overline{\alpha})(t\overline{\alpha} - k\alpha)}. \tag{3}$$

Aria $\triangle ABC$, orientat în sens trigonometric, cu afixele vârfurilor $a, b, c \in \mathbb{C}$, se poate calcula folosind formula $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overline{a}b + \overline{b}c + \overline{c}a\right)$. Aşadar, (1) este echivalentă cu $\operatorname{Im}(z) = 0$ adică $z \in \mathbb{R}$, unde

$$\begin{aligned} z = {} & x^2(m + \overline{m}d + \overline{d}) + y^2(b + \overline{b}n + \overline{n}) + xy(-m + \overline{m}n - \overline{n}) - \\ & - x^2(-n + \overline{n}b - \overline{b}) - y^2\left(-d + \overline{d}m - \overline{m}\right) - xy\left(n + \overline{n}m + \overline{m}\right). \end{aligned}$$

Cum $d = -b$, obţinem $z = x^2(m+n-b(\overline{m}+\overline{n})) + y^2(\overline{b}(m+n) + (\overline{m}+\overline{n})) + {}$ $+xy\left(-m - n - \overline{m} - \overline{n} + \overline{m}n - m\overline{n}\right)$. Astfel, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z} \Leftrightarrow$

$$(x^2 - y^2)(m + n - \overline{m} - \overline{n}) + (x^2 + y^2)\left((m+n)\,\overline{b} - (\overline{m} + \overline{n})\,b\right) + 2xy\left(\overline{m}n - m\overline{n}\right) = 0.$$

Înlocuind formulele (3) în egalitatea precedentă şi simplificând cu factorul $2\,(kt-1) \neq 0$, deducem

$$\begin{aligned} \left(x^2 - y^2\right)\left(\frac{1}{t\overline{\alpha} - k\alpha} - \frac{1}{t\alpha - k\overline{\alpha}}\right) + \left(x^2 + y^2\right)\left(\frac{\overline{b}}{t\overline{\alpha} - k\alpha} - \frac{b}{t\alpha - k\overline{\alpha}}\right) + {} \\ + \frac{2xy\,(t-k)\,(\alpha - \overline{\alpha})}{|t\overline{\alpha} - k\alpha|^2} = 0, \end{aligned}$$

adică

$$\begin{aligned} \left(x^2 - y^2\right)(t+k)\,(\alpha - \overline{\alpha}) + \left(x^2 + y^2\right)\left(t\left(\alpha\overline{b} - \overline{\alpha}b\right) + k\left(\alpha b - \overline{\alpha}\overline{b}\right)\right) + {} \\ + 2xy\,(t-k)\,(\alpha - \overline{\alpha}) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Folosind (2), deducem:

$$\alpha\overline{b} - \overline{\alpha}b = \frac{(\alpha - \overline{\alpha})\left(y^2 - x^2 - xy\left(\alpha^2 + \overline{\alpha}^2 + 2\right)\right)}{|y\alpha + x\overline{\alpha}|^2}$$

şi

$$\alpha b - \overline{\alpha}\overline{b} = \frac{(\alpha - \overline{\alpha})\left(y^2 - x^2 + xy\left(\alpha^2 + \overline{\alpha}^2 + 2\right)\right)}{|y\alpha + x\overline{\alpha}|^2}.$$

Înlocuind aceste ultime două relaţii în (4) şi simplificând cu $\alpha - \overline{\alpha} \neq 0$ rezultă

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)\frac{t\left(y^2 - x^2 - xy\left(\alpha^2 + \overline{\alpha}^2 + 2\right)\right) + k\left(y^2 - x^2 + xy\left(\alpha^2 + \overline{\alpha}^2 + 2\right)\right)}{|y\alpha + x\overline{\alpha}|^2} + {} \\ + \left(x^2 - y^2\right)(t+k) + 2xy\,(t-k) = 0. \end{aligned}$$

Deoarece $\alpha^2 + \overline{\alpha}^2 = 2\cos A$, înmulţind cu numitorul, obţinem

$$\begin{aligned} & \left(x^2 + y^2 + 2xy\cos A\right)\left(\left(x^2 - y^2\right)(t+k) + 2xy\,(t-k)\right) + \\ & + \left(x^2 + y^2\right)\left(\left(y^2 - x^2\right)(t+k) + 2xy\,(1 + \cos A)\,(k-t)\right) = 0 \end{aligned}$$

sau

$$2xy(x^2 - y^2)(t+k)\cos A + 4x^2y^2(t-k)\cos A + 2xy(x^2 + y^2)(k-t)\cos A = 0.$$

Împărţind cu $2xy\cos A \neq 0$, rezultă

$$\left(x^2-y^2\right)(t+k)+2xy\,(t-k)+\left(x^2+y^2\right)(k-t)=0$$

şi apoi

$$2kx^2-2ty^2+2txy-2kxy=0 \Leftrightarrow\ (kx+ty)\,(x-y)=0 \overset{x\neq y}{\Leftrightarrow}\ kx+ty=0,$$

ceea ce este fals. Aşadar presupunerea făcută este falsă, de unde rezultă concluzia.

Bibliografie

[1] Heuberger D., Muşuroia N. (coord.), *Matematică de excelenţă pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă, Clasa a X-a*, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2013, pag. 146-178

[2] Colecţia revistei Kvant

[3] Colecţia revistei Gazeta Matematică, seria B

[4] http://www.viitoriolimpici.ro/

[5] Olimpiada pe Şcoală (The School Yard Olympiad), Forum interactiv de matematică, https://www.facebook.com/groups/1593739420880226/?fref=ts